ORSAY
N°1763

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Françoise GERVAIS-PERCEVAL

Sujet de la Thèse

ETUDE DE L'EFFET LANDAU NON LINEAIRE DANS LE CAS D'UN SPECTRE D'ONDES " PLASMA ELECTRONIQUE "

Soutenue le 16 Décembre 1976 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

M. FITAIRE
J.F. HEYVAERTS
G. LAVAL
G. MATTHIEUSSENT
J. OLIVAIN

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Françoise GERVAIS-PERCEVAL

Sujet de la Thèse

ETUDE DE L'EFFET LANDAU NON LINEAIRE DANS LE CAS D'UN SPECTRE D'ONDES " PLASMA ELECTRONIQUE "

Soutenue le 16 Décembre 1976 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

M. FITAIRE
J.F. HEYVAERTS
G. LAVAL
G. MATTHIEUSSENT
J. OLIVAIN

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A FRANÇOIS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548119_0004

R E M E R C I E M E N T S

Ce travail a été effectué au Département de Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée du Commissariat à l'Energie Atomique. Je remercie son directeur, Monsieur TROCHERIS, de m'avoir accueillie dans son laboratoire.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur DELCROIX d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Que Messieurs les professeurs FITAIRE et HEYVAERTS, que Messieurs LAVAL, MATTHIEUSSENT et OLIVAIN trouvent ici l'expression de mes remerciements pour avoir bien voulu participer à ce même jury. Je remercie très sincèrement Monsieur LAVAL d'avoir accepté, outre sa participation au jury, la charge de rapporteur.

Je remercie particulièrement Monsieur OLIVAIN, qui a dirigé ce travail, et dont l'aide a toujours été un précieux stimulant.

Ma plus profonde reconnaissance va à Monsieur ETIEVANT, ancien chef de la Section de Physique des Plasmas, aux anciens membres de l'équipe "E.O.S.", Messieurs PERULLI et GUILLEMOT.

qui ont guidé mes premières recherches ; ainsi qu'aux actuels physiciens de l'équipe "E.O.S." ; Mademoiselle QUEMENEUR, Messieurs MATTHIEUSSENT - physicien de l'Université d'Orsay - et OLIVAIN, puisqu'ils ont permis que d'un travail mené collectivement, soit extraite la présente thèse.

J'adresse mes remerciements à Messieurs LAVAL et PELLAT pour leur collaboration concernant les études théoriques, et Monsieur COTSAFTIS pour son aide concernant la résolution de plusieurs problèmes d'ordre mathématique.

Je suis heureuse de remercier Messieurs AYMAR, GRAVIER, KOECHLIN et SAMAIN pour leurs critiques et leurs conseils relatifs à la présentation finale du manuscrit.

Je ne saurais oublier de remercier les techniciens du groupe, Messieurs CLAIRET, MALKY, MELONI pour leur aide technique indispensable et très efficace.

Enfin, que tous ceux qui se sont occupés de l'impression de cette thèse : Mademoiselle LOYAU et ses collaboratrices, Monsieur DANET et son équipe, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur gentillesse.

P L A N

Page

Chapitre I : Introduction. 1

ETUDE THEORIQUE

Chapitre II : Propagation et évolution d'un spectre "large bande" d'ondes plasma électronique dans une colonne de plasma : étude théorique. 11

II.1 Hypothèses du calcul. 11

II.2 Réponse du plasma au premier ordre. 15

II.3 Expressions du potentiel $\phi^{(2)}$ et de la fonction de distribution $f^{(2)}$ au second ordre. 17

II.4 Réponse du plasma au troisième ordre. 20

II.5 Evolution du potentiel. 22

II.5.1 Les modes sont "piqués dans l'espace des k. 22

II.5.2 Hypothèse des phases aléatoires. 22

II.5.3 Expression de Im $\overline{/\bar{E}\infty\ (k-k'),\ \omega-\omega')/}$. 24

II.5.4 Evolution spatiale de $\langle \varphi_k \varphi_k^{*}(m,z,\omega,\mu) \rangle$. 25

II.5.5 Cas d'un milieu infini radialement. 26

II.6 Expression des résultats dans le cas d'une relation de dispersion particulière expérimentale. 27

Page

II.7 Existence d'une onde forcée de battement. 28

II.8 Conservation du flux de plasmons. 29

II.9 Conclusion. 34

Annexe II.A 35

Annexe II.B 40

Bibliographie. 50

Chapitre III : Etude numérique de l'évolution du spectre. 51

III.1 Exposé du problème à traiter numériquement. 51

III.2 Spectre initial en z = 0. 52

III.3 Calcul du facteur G. 53

III.4 Relation de dispersion. 54

III.5 Détermination du coefficient d'amortissement Landau non linéaire. 54

III.6 Résultats. 56

III.7 Conclusion. 58

Bibliographie. 60

Chapitre IV : Couplage résonnant à quatre ondes. 61

IV.1 Rappel. 62

IV.2 Cas d'un couplage résonnant à quatre ondes. 63

IV.3 Equation du couplage à quatre ondes dans le cas d'une relation de dispersion droite. 66

IV.4 Evolution de l'onde de fréquence F_1 au début du processus. 68

IV.5 Conclusion. 70

Bibliographie. 72

Page

Chapitre V : Déformation de la fonction de distribution électronique moyennée sur le temps. Théorie quasi-linéaire. 73

V.1 Introduction. 73

V.2 Diffusion résonnante à la vitesse de phase. 74

V.2.1 Partie basse fréquence du spectre. 75

V.2.2 Partie haute fréquence du spectre. 77

V.3 Diffusion résonnante à la vitesse de groupe. 78

V.3.1 Début de l'intéraction. 80

V.3.2 Solution analytique de l'équation de diffusion. 82

V.4 Variation de la partie adiabatique de la fonction de distribution. 87

V.4.1 Début de l'intéraction. 88

V.4.2 Obtention d'une solution analytique. 89

V.4.3 Autre méthode pour parvenir à une solution analytique. 92

V.5 Conclusion. 98

Annexe V.A. 99

Annexe V.B. 101

Annexe V.C. 103

Annexe V.D. 109

Bibliographie. 117

ETUDE EXPERIMENTALE

Chapitre VI : Description du dispositif et mesure des grandeurs caractéristiques du plasma. Discussion des hypothèses du modèle théorique. 119

Page

VI.1 Dispositif expérimental E.O.S. 120

VI.1.1 Ensemble mécanique. 120

VI.1.2 Enroulement magnétique. 120

VI.1.3 Source de plasma. 123

VI.2 Méthodes de mesure des paramètres du plasma. 123

VI.2.1 Mesure de la densité et du profil de densité. 123

VI.2.2 Mesure de la température électronique 125

VI.3 Mesure de la fonction de distribution des électrons. 126

VI.3.1 Théorie de l'analyseur électrostatique. 126

VI.3.2 Dérivation du courant électronique. 127

VI.3.3 Description de l'analyseur. 128

VI.3.4 Mesure du courant et de la fonction de distribution. 131

VI.4 Détermination du potentiel plasma. 136

VI.4.1 Utilisation de la caractéristique d'entrée de l'analyseur. 136

VI.4.2 Intéraction avec une onde monochromatique. 136

VI.4.3 Conclusion. 138

VI.5 Densité d'énergie cinétique d'un plasma ξ_c. 138

VI.5.1 Détermination de ξ_c à partir de la température T_e. 138

VI.5.2 Calcul de ξ_c à partir de la fonction de distribution. 140

VI.6 Calcul du flux d'énergie cinétique. 140

VI.7 Caractéristiques du plasma d'E.O.S. 141

VI.8 Discussion des hypothèses du modèle théorique. 142

VI.8.1 Influence des collisions. 142

VI.8.2 Hypothèse d'un modèle unidimensionnel. 142

VI.8.3 Influence du gradient longitudinal de densité et du profil radial de densité. 143

Annexe VI. 144

Bibliographie. 146

Chapitre VII : Mesure des paramètres liés aux ondes, cas du spectre de bruit. Discussion des hypothèses. 149

VII.1 Mesure de la fréquence d'une onde. 150

VII.2 Détermination de la longueur d'onde. 150

VII.3 Courbe de dispersion. 151

VII.4 Mesure de l'amplitude des ondes. 153

VII.4.1 Profil radial de potentiel. 153

VII.4.2 Mesure du coefficient de couplage des sondes. 156

VII.5 Mesure du potentiel oscillant d'une onde. 157

VII.6 Cas du spectre de bruit. 159

VII.6.1 Production du spectre d'ondes. 159

VII.6.2 Calcul de l'amplitude par unité de fréquence du spectre. 161

VII.7 Mesure du coefficient d'amortissement ou de croissance des ondes existant dans le milieu. 162

VII.7.1 A partir de l'amplitude des ondes. 162

VII.7.2 163

VII.7.3 167

VII.8 Discussion des hypothèses. 168

VII.9 Estimation du paramètre de turbulence α. 169

Bibliographie. 171

Page

Chapitre VIII : Evolution du spectre par effet Landau non linéaire. Mise en évidence des ondes forcées. Conservation du flux de plasmons. Effet Landau non linéaire dans le cas de deux ondes monochromatiques. 173

VIII.1 Evolution du spectre avec la distance. 174

VIII.2 Evolution du spectre avec la puissance. 176

VIII.3 Influence du niveau de bruit de fond sur l'évolution spatiale du spectre. 176

VIII.4 Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. 179

VIII.4.1 Calcul numérique. 181

VIII.4.2 Couplage à quatre ondes. 184

VIII.5 Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux concernant les taux de croissance ou d'amortissement de chaque onde du spectre de turbulence. 189

VIII.5.1 Calcul théorique. 189

VIII.5.2 Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux aux basses fréquences. 190

VIII.6 Mise en évidence des ondes forcées. 192

VIII.7 Conservation du nobre de plasmons. 194

VIII.8 Effet Landau non linéaire dans le cas de deux ondes monochromatiques. 199

VIII.9 Conclusion. 202

Bibliographie. 204

Page

Chapitre IX : Déformation de la fonction de distribution et chauffage des électrons. 205

IX.1 Conservation du courant total collecté par l'analyseur au potentiel plasma. 205

IX.2 Déformation de la fonction de distribution avec la puissance, à une distance donnée. 208

IX.3 Déformation de la fonction de distribution avec la distance,pour une puissance donnée. 208

IX.4 Evolution de la température. 210

IX.5 Conclusion partielle au vu des figures précédentes. 217

IX.6 Causes de variation des vitesses de phase et de groupe. 217

IX.6.1 Variation de la courbe de dispersion due aux fluctuations de densité. 218

IX.6.2 Variation de la courbe de dispersion avec la puissance du spectre injecté. 221

IX.7 Effet d'élargissement de résonance 223

IX.8 Bilan énergétique. 225

IX.9 Conclusion. 228

Bibliographie. 229

Chapitre X : Conclusion : réflexions sur le domaine de forte turbulence. 231

X.1 Evolution spatiale du spectre. 231

Page

X.2 Déformation de la fonction de distribution
en régime de turbulence forte. 235

X.3 Conclusion. 239

X.3.1 Régime linéaire. 239

X.3.2 Régime de turbulence faible. 239

X.3.3 Régime de turbulence forte. 239

Bibliographie. 241

CHAPITRE I

I N T R O D U C T I O N

Les études théoriques et expérimentales sur la propagation non linéaire des ondes dans les gaz ionisés ont suscité un grand intérêt pendant de nombreuses années, en particulier dans notre laboratoire, autour de la colonne de plasma expérimentale E.O.S. Nous pouvons schématiquement classer les expériences faites dans cette équipe en deux catégories :

- les premières concernent plus spécialement les intéractions onde-onde. Dans le cadre des interactions à trois ondes, il faut citer l'étude des mécanismes de génération de deux ondes par désintégration d'une onde /1/, et de couplage à trois ondes avec création d'une onde par fusion de deux modes /2/.

Un formalisme permettant d'étudier le couplage résonnant à quatre ondes sera présenté dans le cadre de ce mémoire.

- Les secondes s'intéressent plus spécialement aux intéractions ondes-particules, l'intéraction fondamentale étant l'amortissement Landau linéaire. Dans cette catégorie, nous trouvons les

échos de Vlasov [3,4,5], les mécanismes décrits par la théorie quasi-linéaire, [6, 7] , le piégeage des particules dans le puits de potentiel d'une onde de grande amplitude [8, 9, 10], et l'amortissement Landau non linéaire qui fera principalement l'objet de cette étude.

Tous les calculs sur les oscillations électrostatiques haute fréquence dans un plasma ont eu pour but de trouver des solutions aux équations de Vlasov et Poisson. Dans le domaine de faible turbulence, la technique de perturbation utilisée a permis de montrer que toute solution était la superposition de deux solutions [7, 11, 12] :

- une solution oscillante, dite de Van Kampen, qui n'est pas amortie avec la distance à laquelle aucun champ électrique n'est associé, et qui permet de comprendre le mécanisme des échos [3, 4, 5, 7],
- une solution habituelle, dite de Landau, amortie avec la distance, à laquelle est associée un champ électrique lui-même amorti avec la distance.

Seule la solution de Landau a été utilisée pour étudier l'intéraction d'un plasma avec une ou plusieurs ondes monochromatiques. Le calcul, poursuivi au second ordre, a permis d'étudier les mécanismes tels que le piégeage [8 à 10, 13 à 20], le couplage de modes [2, 21 à 25], la désintégration /1/, et la théorie quasi-linéaire [7, 23 à 27]. Le calcul poursuivi au troisième ordre permet d'étudier le mécanisme d'effet Landau

non linéaire /21 à 25, 28 à 33/.

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'évolution d'un spectre de turbulence par effet Landau non linéaire, et de la modification qui en résulte sur la fonction de distribution électronique.

L'effet Landau non linéaire est un processus conduisant à un transfert d'énergie d'une onde ou d'un spectre d'ondes aux particules d'un plasma. Quand un spectre d'ondes "plasma électronique" est excité dans un plasma, des ondes forcées sont créées, dont la vitesse de phase est voisine de la vitesse thermique des particules. L'échange d'énergie est supporté par l'amortissement Landau linéaire de ces ondes forcées créées non linéairement.

La théorie est faite dans l'approximation de la turbulence faible, valable quand le rapport α de la densité d'énergie associée au spectre ξ_f à la densité d'énergie cinétique ξ_c est très inférieur à 1. ξ_f et ξ_c sont données par les relations :

$$\xi_f = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_{\omega} E_\omega^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\,\varepsilon(k,\omega)\right)$$

$$\xi_c = \frac{1}{2} n_0 k_B T_e$$

où E_ω est le champ électrique associé à la composante de fréquence ω, de nombre d'onde k ; $\varepsilon(k,\omega)$ est la relation de

dispersion du milieu ; k_B la constante de Boltzmann, n_o la densité et T_e la température électronique.

Nous avons pu obtenir des conditions expérimentales pour lesquelles ni le piégeage, ni le couplage de modes n'interviennent. Pour éliminer les effets de piégeage, le spectre est choisi de telle sorte que sa longueur de cohérence L_c soit bien inférieure à la longueur de piégeage L_p ; ces deux longueurs sont définies de la façon suivante :

$$L_c = \frac{\pi}{\Delta\omega} \frac{\overline{v_\varphi}\,\overline{v_g}}{\overline{v_\varphi} - \overline{v_g}}$$

$$L_p = 2\pi\,\overline{v_\varphi} \left(\frac{m_e}{q K E}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\Delta\omega$ est la largeur du spectre, $\overline{v\varphi}$ et $\overline{vg}$ les valeurs moyennes des vitesses de phase et de groupe ; q est la charge de la particule de masse me.

La désintégration est éliminée en choisissant l'amplitude E_ω de chaque composante du spectre bien inférieure au seuil de désintégration /1/. Du fait de la forme de la courbe de dispersion, le couplage résonnant à trois ondes ne peut se produire dans le domaine de fréquence utilisé.

L'effet Landau non linéaire dans le cas de deux ondes monochromatiques a été observé :

- sur des ondes de Bernstein par Chang et Porkolab /34/
- sur des ondes plasma électronique par Gentle et Malein /35/

- sur des ondes acoustiques ioniques par Ikezi et Kiwamoto /36/, Grésillon, Mantei et Matthieussent /37/.

Plusieurs avantages apparaissent quand on étudie, non pas deux ondes, mais un spectre d'ondes monochromatiques : le phénomène est plus facilement observable ; pour un paramètre α donné, le piégeage et la désintégration peuvent être mieux éliminés ; enfin l'absence de corrélation entre les différentes composantes du spectre permet d'utiliser plus justement l'hypothèse des phases aléatoires.

L'étude de l'effet Landau non linéaire dans le cas d'un spectre d'ondes "plasma électronique" sera présentée de la façor suivante :

Au chapitre II, les résultats théoriques concernant l'évolution du spectre large bande sont établis. La théorie tient compte des effets de géométrie finie radialement.

Le chapitre III présente une étude numérique de cette évolution.

Au chapitre IV, sont discutées théoriquement les possibilités de couplage à quatre ondes dans un certain domaine de fréquences conjointement à l'effet Landau non linéaire.

L'évolution dans l'espace de la fonction de distribution moyennée sur le temps est étudiée au chapitre V dans le

cadre de la théorie quasi-linéaire.

Le chapitre VI décrit les caractéristiques du dispositif E.O.S. à l'aide duquel ont été faites les expériences, ainsi que les diverses techniques mises en oeuvre pour mesurer les caractéristiques du plasma.

La mesure des caractéristiques des ondes est évoquée au chapitre VII.

Enfin, la présentation des résultats expérimentaux liés au mécanisme d'effet Landau non linéaire est faite.

Le chapitre VIII traite de l'évolution spatiale du spectre, de la comparaison théorique et expérimentale de cette évolution, de la mise en évidence des ondes forcées, et de la conservation du nombre de plasmons durant l'évolution du spectre.

Le chapitre IX se rapporte à l'observation de la déformation de la fonction de distribution des électrons et à la discussion des résultats expérimentaux. Des résultats concernant le chauffage des électrons sont présentés.

Au chapitre X est fait un bilan des résultats du mécanisme d'effet Landau non linéaire dans le cadre de la turbulence faible et au-delà de cette limite.

CHAPITRE I

BIBLIOGRAPHIE

/1/ M. PERULLI, thèse, Rapport C.E.A. - R. - 3639 (1968)

/2/ M. GUILLEMOT, F. GERVAIS, A. QUEMENEUR, XIè Conférence internationale sur les phénomènes dans les gaz ionisés, Prague, proceedings p. 348 (1973)

/3/ M. GUILLEMOT, G. MATTHIEUSSENT, J.OLIVAIN, F. PERCEVAL et A. QUEMENEUR, Phys. of Fluids, 14, p. 2065 (1971)

/4/ M. GUILLEMOT, thèse, Rapport EUR-CEA FC 639 (1972)

/5/ G. MATTHIEUSSENT, thèse, Orsay série A n° 946 (1972)

/6/ M. GUILLEMOT, J. OLIVAIN, F. PERCEVAL and J. SCHARER, Phys. of Fluids, 14, p. 952 (1971)

/7/ J. OLIVAIN, thèse, Rapport EUR-CEA FC 602 (1971)

/8/ M. GUILLEMOT, J. OLIVAIN, F. PERCEVAL and A. QUEMENEUR, Xth International Conference in Phenomena in ionized gases, Oxford (1971), proceedings p. 316.

/9/ M. GUILLEMOT, J. OLIVAIN, F. PERCEVAL et A. QUEMENEUR Journal de Physique, t 32, Fasc. 10, 65b-124 (1971)

/10/ A. QUEMENEUR thèse (à paraître)

/11/ N.G. VAN KAMPEN Physica 21, p. 949 (1955)

/12/ B.B. KADOMSTEV, Sov. Phys. USPEKHI, 11, 3, 328 (1968)

/13/ T.M. O'NEIL Phys. Fluids, 8, 12, p. 2255 (1965)

/14/ L.M. ALT'SHUL and V.I. KARPMAN, Sov. Phys. J.E.T.P., 22, 2, (1966).

/15/ J.H. MALMBERG, CB. WARTON Phys. Rev. Letters 19, p. 775 (1967)

/16/ J.M. DAWSON and R. SHANNY Phys. Fluids 11, 7, p. 1506 (1968)

/17/ G. LAVAL, R. PELLAT et A. ROUX Phys. Letters, 29A, 3, (1969)

/18/ I.H. OEI, O.C. SWANSON, Phys. of Fluids, 15, p. 2118 (1972)

/19/ SHIH-TUNG-TSAI, J. Plasma Physics 11, p. 213, (1974)

/20/ R. SUGIHARA et K. YAMANAKA, Physics of Fluids 18, p. 114 (1975)

/21/ R.Z. SAGDEEV and A.A. GALEEV
Non linear Plasma Theory, Benjamin, New York (1969)

/22/ L.M. ALTSHUL and V.I. KARPMAN
Theory of non linear waves in collisionless plasmas
Sov. Phys. J.E.T.P., 22, 2, p. 361 (1966)

/23/ V.N. TSYTOVITCH
Non linear effects in plasma - Moscou (1967)

/24/ R.C. DAVIDSON, Methods in non linear plasma theory
Academic Press (1972)

/25/ G. LAVAL et R. PELLAT, Plasma Physics Les Houches (1972) Gordon and Breach

/26/ W.E. DRUMMOND Phys. of Fluids 7, 6 (1964)

/27/ J.H. MALMBERG, T.H. JENSEN and T.M. O'NEIL, Novosibirsk Conference CN-24/E8 (1968)

/28/ T.M. O'NEIL Phys of Fluids, 8, 2255 (1965)

/29/ W.E. DRUMMOND and D. PINES, Nucl. Fusion Suppl. Pt III, 1049 (1962)

/30/ W.M. MANNHEIMER and T.H. DUPREE
Phys. of Fluids 11, 2709, (1968)

/31/ K.B. DYSTHE and R.N. FRANKLIN, Plasma Phys., 12, 705, (1970)

/32/ E. OTT and C.T. DUM, Phys. of Fluids, 14, 959 (1971)

/33/ D.W. HEWETT and T.P. ARMSTRONG, Phys. of Fluids 17, 595 (1974)

/34/ R.P.H. CHANG and M. PORKOLAB, Phys. Rev. Letters, 25, 1261 (1970)

/35/ K.W. GENTLE and A. MALEIN, Phys. Rev. Letters 26, 625 (1971)

/36/ H. IKEZI and Y. KIWAMOTO - Phys. Rev. Letters 27, 718 (1971)

/37/ H. GRESILLON, T. MANTEI and G. MATTHIEUSSENT (en publication).

CHAPITRE II.

PROPAGATION ET EVOLUTION D'UN SPECTRE "LARGE BANDE" D'ONDES PLASMA ELECTRONIQUE DANS UNE COLONNE DE PLASMA : ETUDE THEORIQUE.

Cette étude théorique tient compte des effets de géométrie finie radialement déjà introduits par Matthieussent [1] et utilise une méthode analogue à celles de Galeev et al [2] et Jensen [3]. Le calcul est conduit analytiquement dans le cas d'une relation de dispersion particulière, qui est la relation de dispersion existant dans le milieu, et en utilisant à juste titre l'hypothèse des phases aléatoires pour les ondes du spectre de turbulence. Les résultats théoriques concernant la modification de l'allure du spectre par effet Landau non linéaire, la présence d'ondes forcées, et la conservation du flux de plasmons à travers la colonne de plasma pourront ainsi être mieux confrontés et comparés aux résultats expérimentaux.

II.1 HYPOTHESES DU CALCUL

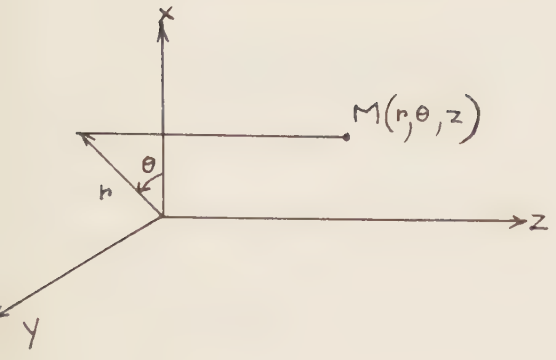
La propagation des ondes du spectre de turblence est étudiée

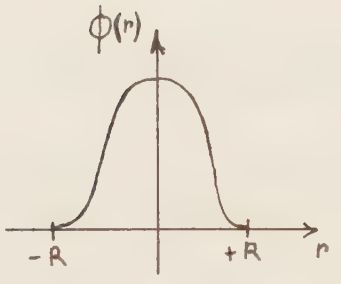
dans un plasma sans collisions. Le champ magnétique, uniforme, d'axe confondu avec l'axe de la colonne, est très grand et tel que la fréquence cyclotronique électronique est beaucoup plus grande que la fréquence plasma électronique. Le milieu pourra donc être décrit par des équations unidimensionnelles. Les ions sont considérés comme immobiles et servent à neutraliser le milieu : il n'y a pas de champ électrique à l'équilibre. Les ondes excitées sont des ondes électrostatiques, c'est-à-dire des ondes dont la vitesse de phase est très petite devant la vitesse de la lumière.

Dans ces conditions, le milieu est décrit par les équations de Vlasov à une dimension (ou équation de Boltzmann sans collisions) et de Poisson, exprimée en géométrie cylindrique. La colonne de plasma est supposée être entourée d'un tube conducteur de rayon $r = R$. La densité non perturbée $n(r)$ dépend de la distance radiale r, tandis que la fonction de distribution des vitesses électroniques $F_0(v)$ est indépendante de la position r.

Nous nous placerons bien entendu pour cette étude dans le domaine de faible turbulence, défini au chapitre I et caractérisé par $\alpha \ll 1$, et dans le cas d'un spectre tel que sa longueur de cohérence L_C soit bien inférieure à la longueur de piégeage des ondes correspondantes. La fréquence de plasma électronique est de l'ordre de grandeur des fréquences du spectre.

Dans le système de coordonnées cylindriques rappelées sur le schéma II-1, les équations de Vlasov et de Poisson s'écrivent





$$\phi(R) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

Schéma II.1

$$(II.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t}(r,\theta,z,v,t) + v\frac{\partial f}{\partial z}(r,\theta,z,v,t) - \frac{q_e}{m_e}\frac{\partial \phi}{\partial z}(r,\theta,z,t)\frac{\partial f}{\partial v}(r,\theta,z,v,t) = 0$$

$$(II.2) \quad \Delta\left[\phi(r,\theta,z,t) - \phi_{\text{extérieur}}\right] = -\frac{q}{\varepsilon_0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dv - n_i(r)\right\}$$

q représente la charge algébrique de la particule de masse m_e.

$\phi_{ext.}$ sera négligé dans la suite du calcul.

La méthode consiste à faire un traitement de perturbation. On pose :

$$(II.3) \quad f(r,\theta,z,v,t) = N(r)\,F_0(v) + f_1(r,\theta,z,v,t)$$

$N(r)$ est la densité réduite ; $N(r) = \frac{n_r}{n(r=0)}$

$F_0(v)$ représente la partie non perturbée de la fonction de distribution et f_1 la petite perturbation.

Effectuons des transformations de Fourier sur les trois composantes r, θ, z, chaque transformation ou expansion de Fourier étant définie comme suit :

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\exp(i\omega t)\,dt$$

$$g(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} g(\theta)\exp(i m\theta)\,d\theta$$

$$g(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-iKz)\, dz$$

l'équation de Vlasov s'écrit alors :

$$(II.4) \quad -(\omega - Kv) f_1(r, m, K, v, \omega) = -\frac{q}{mc} K \phi(r, K, m, \omega) N(r) \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} + \frac{q}{me} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK'}{2\pi} \sum_{m'} (K - K') \phi(r, m - m', K - K', \omega - \omega') f_1(r, m', K', v, \omega')$$

La sommation sur m' s'entend avec $\omega \neq \omega'$.

L'équation de Poisson, compte tenu de la relation,

$$n_i(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(v)\, dv$$

s'écrit :

$$(II.5) \quad (\nabla_T^2 - K^2) \phi(r, m, K, \omega) = -\frac{q}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(r, m, K, v, \omega)\, dv$$

∇_T^2 est le "Laplacien transverse" ; il est tel que :

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2}$$

Le système constitué par les équations (II.4) et (II.5) est non linéaire ; il peut être résolu de manière itérative lorsque l'amplitude des perturbations est faible, soit

$$f_1(r, \theta, z, v, t) \ll F_0(v)$$

Les équations (II.4 et II.5) sont alors linéarisées par rapport aux puissances successives du potentiel

$$\phi(r,m,K,\omega) = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)}$$
$$f_1(r,m,K,v,\omega) = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)}$$

II.2 REPONSE DU PLASMA AU PREMIER ORDRE

La réponse du plasma au premier ordre s'obtient en résolvant les équations de Vlasov et de Poisson en $\phi^{(1)}$ et $f^{(1)}$. Cette résolution est effectuée en négligeant, dans l'équation de Vlasov (II.4), le terme non linéaire figurant au second membre. Nous obtenons ainsi :

$$(II.6)\quad \boxed{f^{(1)}(r,m,K,v,\omega) = -\frac{q}{m_e}\frac{K N(r)}{\omega - Kv}\frac{\partial F_o(v)}{\partial v}\phi^{(1)}(r,m,K,\omega)}$$

En reportant cette valeur dans l'équation de Poisson, l'équation différentielle donnant le potentiel $\phi^{(1)}$ s'écrit :

$$(II.7)\quad \left(\nabla_T^2 - K^2\right)\phi^{(1)}(r,m,K,\omega) = \frac{q^2}{m_e \varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K N(r)}{\omega - Kv}\phi^{(1)}(r,m,K,\omega)\frac{\partial F_o(v)}{\partial v}\,dv$$

La constante diélectrique du plasma, associée à la propagation d'ondes longitudinales, s'écrit, en milieu infini et homogène et pour une densité égale à celle du centre de la colonne :

$$\varepsilon_\infty(K,\omega) = 1 + \frac{q^2}{m_e \varepsilon_o}\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega - Kv}\frac{\partial F_o(v)}{\partial v}\,dv$$

L'équation (II.7) peut être écrite en introduisant $\varepsilon_\infty(k,\omega)$:

$$(II.8)\quad \boxed{\left(\nabla_T^2 - K^2\right)\phi^{(1)}(r,m,K,\omega) = N(r)K^2\left[\varepsilon_\infty(K,\omega) - 1\right]\phi^{(1)}(r,m,K,\omega)}$$

Pour résoudre l'équation (II.8), et compte tenu des conditions aux limites sur le potentiel, rappelées sur le schéma (II.1), conditions qui s'appliquent au potentiel au premier ordre $\phi^{(1)}$, des solutions $\phi^{(1)}$ sont cherchées de la forme :

$$(II.9)\quad \boxed{\phi^{(1)}(r,m,\kappa,\omega) = \sum_{\mu} \varphi^{(1)}(m,\kappa,\omega,\mu)\,\Psi_{\mu,m,\kappa}(r)}$$

$\psi_{\mu,m,k}(r)$ étant les fonctions propres orthogonales de l'opérateur linéaire [1,4] :

$$(II.10)\quad \mathcal{L}_m(K) = \frac{1}{K^2 N(r)}\left[\nabla_T^2 - K^2\right]$$

L'équation à résoudre admet des solutions $\lambda_{m,\mu}(k)$:

$$(II.11)\quad \mathcal{L}_m(K)\,\Psi_{\mu,m,\kappa}(r) = -\lambda_{m,\mu}(K)\,\Psi_{\mu,m,\kappa}(r)$$

où $\lambda_{m\mu}(k)$ sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire.
Les fonctions propres $\psi_{\mu,m,k}(r)$ sont classées d'après leur nombre μ de zéros dans l'intervalle $]0, R[$.
Les solutions $\psi_{\mu,m,mk}(r)$ satisfont à la condition d'orthogonalité :

$$(II.12)\quad \frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\,dr\,N(r)\,\Psi_{\mu,m,\kappa}(r)\,\Psi_{\mu',m,\kappa}(r) = \delta_{\mu\mu'}$$

où S est la section du tube conducteur, et $\delta\mu\mu'$ le symbole de Kroneker

$$\delta_{\mu\mu'}\begin{cases} = 0 & si \quad \mu \neq \mu' \\ = 1 & si \quad \mu = \mu' \end{cases}$$

Les valeurs propres $\lambda_{m\mu}$ (k réel) sont des valeurs réelles. Pour une valeur de m, le mode prédominant est le mode $\mu=1$. La valeur propre λ_{01}, associée au mode fondamental $m=0$ est la plus petite des valeurs propres.

- Nous pouvons écrire l'équation (II.8) sous la forme :

$$N(r)\,K^2\left\{d_m(K)+1-\varepsilon_\infty(K,\omega)\right\}\phi^{(1)}(r,m,K,\omega)=0$$

En développant les fonctions ϕ sur la base orthonormée des fonctions propres ψ, à l'aide de (II.11), nous obtenons :

$$\sum_{\mu} N(r)K^2\left[-\lambda_{m,\mu}(K)+1-\varepsilon_\infty(K,\omega)\right]\varphi(m,K,\omega,\mu)\,\Psi_{\mu,m,K}(r)=0$$

Nous pouvons définir une constante diélectrique linéaire dans le plasma $\varepsilon_L(m,k,\omega,\mu)$ telle que

$$\text{(II.13)}\qquad \boxed{\varepsilon_L(m,K,\omega,\mu)=\varepsilon_\infty(K,\omega)+\lambda_{m,\mu}(K)-1}$$

ε_L sera appelée relation de dispersion en géométrie finie.

II.3 EXPRESSIONS DU POTENTIEL $\phi^{(2)}$ ET DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION $f^{(2)}$ AU SECOND ORDRE

La résolution au second ordre des équations de Vlasov et Poisson permet d'obtenir les valeurs perturbées du potentiel et de la fonction de distribution en reportant les valeurs trouvées au premier ordre dans le second membre de l'équation (II.4).

(II.4) s'écrit au second ordre :

$$\text{(II.14)}\qquad 0=(\omega-K\nu)f^{(2)}(r,m,K,\nu,\omega)+\frac{q}{m_e}K\,N(r)\frac{\partial F_0(\nu)}{\partial\nu}\,\phi^{(2)}(r,m,K,\omega)$$
$$+\frac{q}{m_e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{m'}(K-K')\sum_{\mu''}\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'\\K-K'\\\omega-\omega'\\\mu''\end{pmatrix}\Psi^{(1)}_{\mu'',m-m',K-K'}(r)\,f^{(1)}(r,m',K',\nu,\omega')$$

avec $\omega\neq\omega'$

(II.15) Posons $$D_K^{(1)} = -\frac{q}{me}\,\frac{1}{\omega - Kv}\,\frac{\partial F_0(v)}{\partial v}$$

et :

(II.16) $$D^{(2)}_{K,K'} = \frac{q^2}{m_e^2}\,\frac{1}{\omega - Kv}\,\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\omega' - K'v}\,\frac{\partial F_0(v)}{\partial v}\right\}$$

Alors

(II.17) $$f^{(2)}(r,m,K,v,\omega) = K\,\phi^{(2)}(r,m,K,\omega)\,N(r)\,D_K^{(1)}$$
$$+\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dK'}{2\pi}\sum_{m',\mu'',\mu'}(K-K')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix} m-m' \\ K-K' \\ \omega-\omega' \\ \mu'' \end{pmatrix}\psi^{(1)}_{\mu'',K-K',m-m'}(r)\right.$$
$$\left.\times K'\,\varphi^{(1)}(m',K',\omega',\mu')\,\psi^{(1)}_{\mu',K',m'}(r)\,N(r)\,D^{(2)}_{K,K'}\right\}$$

L'équation de Poisson s'écrit : $$\phi^{(2)} = \frac{q}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\lambda_{m\mu}(k)\,N(r)\,K^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(2)}\,dv$$

soit :

(II.18) $$\phi^{(2)}(r,m,K,\omega)\,\varepsilon_L(K,\omega,m,\mu)$$
$$= \frac{q}{\varepsilon_0 K^2}\int dv\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dK'}{2\pi}\sum_{m',\mu'',\mu'}(K-K')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix} m-m' \\ K-K' \\ \omega-\omega' \\ \mu'' \end{pmatrix}\psi^{(1)}_{\mu'',m-m';K-K'}(r)\right.$$
$$\left.\times K'\,\varphi^{(1)}(m',K',\omega',\mu')\,\psi_{\mu',K',m'}(r)\,N(r)\,D^2_{KK'}\right]$$

Cherchons à exprimer $\phi^{(2)}(r,m,k,\omega)$ en fonction de $\varphi^{(2)}(m,k,\omega,\mu)$.

Considérons la projection sur le vecteur propre $\psi_\mu(r)$ de :

$$\phi^{(2)}(r,m,K,\omega) = \sum_\mu \varphi^{(2)}(m,K,\omega)\,\psi^{(2)}_{\mu,m,K}(r)$$

$$(II.19)\quad \frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\,dr\,N(r)\sum_{\mu}\varphi^{(2)}(m,\kappa,\omega)\,\psi^{(2)}_{\mu,m,\kappa}(r)\,\psi^{(2)}_{\mu,m,\kappa}(r)=\varphi^{(2)}(m,\kappa,\omega,\mu)$$

L'équation (II.18), associée à (II.19), permet d'écrire :

$$(II.20)\quad \varphi^{(2)}(m,\kappa,\omega,\mu)=\frac{q}{\varepsilon_0\kappa^2\varepsilon_\perp(m,\kappa,\omega,\mu)}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\nu\;D^{(2)}_{\kappa,\kappa'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\kappa'}{2\pi}\right.$$

$$\left.\times\sum_{m',\mu',\mu''}(\kappa-\kappa')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'\\ \kappa-\kappa'\\ \omega-\omega'\\ \mu''\end{pmatrix}\kappa'\,\varphi^{(1)}(m',\kappa',\omega',\mu')\,G^{(2)}(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa')\right\}$$

en posant

$$(II.21)\quad G^{(2)}(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa')=\frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\,dr\,N^2(r)\,\psi_{\mu,m,\kappa}(r)\,\psi_{\mu'',m-m',\kappa-\kappa'}(r)\,\psi_{\mu',m',\kappa'}(r)$$

Cette quantité $G^{(2)}(k,k-k',k')$ pourra être notée par la suite $G^{(2)}(\omega,\omega-\omega',\omega')$.

En reportant l'expression (II.20) dans l'expression (II.17), on obtient :

$$(II.22)\quad F^{(2)}(r,m,\kappa,\nu,\omega)=\sum_{\mu}\frac{q}{\varepsilon_0\kappa^2\varepsilon_\perp(m,\kappa,\omega,\mu)}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\nu\;D^{(2)}_{\kappa,\kappa'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\kappa'}{2\pi}\sum_{\mu',\mu''}(\kappa-\kappa')\right.$$

$$\left.\times\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'\\ \kappa-\kappa'\\ \omega-\omega'\\ \mu''\end{pmatrix}\kappa'\,\varphi^{(1)}(m',\kappa',\omega',\mu')\,G^{(2)}(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa')\,\psi_{\mu,m,\kappa}(r)\,D^{(1)}_{\kappa}\,N(r)\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\kappa'}{2\pi}\sum_{m',\mu',\mu''}(\kappa-\kappa')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'\\ \kappa-\kappa'\\ \omega-\omega'\\ \mu''\end{pmatrix}\kappa'\,\varphi^{(1)}(m',\kappa',\omega',\mu')\,D^{(1)}_{\kappa}\,N(r)\,\psi_{\mu'',m-m',\kappa-\kappa'}(r)\,\psi_{\mu,m,\kappa}(r)$$

II.4 REPONSE DU PLASMA AU TROISIEME ORDRE

La méthode itérative poursuivie au troisième ordre permet d'écrire de la même façon les perturbations de potentiel et de la fonction de distribution électronique.

Les équations (II.4) et (II.5) s'écrivent au troisième ordre :

(II.23)

$$f^{(3)}(r,m,k,v,\omega) = k\,\phi^{(3)}(r,m,k,\omega)\,D_k^{(1)}N(r)$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{m'}k'\phi^{(1)}(r,m',k',\omega')\left\{-\frac{q}{m_e}\,\frac{1}{\omega-kv}\,\frac{\partial f^{(2)}}{\partial v}(r,m-m',k-k',\omega-\omega',v)\right\}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{m'}(k-k')\phi^{(2)}\begin{pmatrix}r\\ m-m'\\ k-k'\\ \omega-\omega'\end{pmatrix}\left\{-\frac{q}{m_e}\,\frac{1}{\omega-kv}\,\frac{\partial f^{(1)}}{\partial v}(r,m',k',v,\omega')\right\}$$

et

$$\phi^{(3)}(r,m,k,\omega) = \frac{q}{\varepsilon_0 k^2 N(r)\,\partial_{m,\mu}(k)}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(3)}(r,m,k,v,\omega)\,dv \qquad \text{(II.24)}$$

L'écriture des différents termes (notamment $f^{(2)}(r,m-m',k-k',\omega-\omega',v)$ qui se fait à partir de (II.22) en changeant k en k-k', ω en ω-ω' ; k' en k" et k-k' en k-k'-k") est donnée dans l'annexe II A. Les calculs conduisant aux valeurs finales $f^{(3)}(r,m,k,v,\omega)$ et $\phi^{(3)}(r,m,k,\omega)$ sont aussi faits dans l'annexe II.A.

Nous donnons simplement ici l'expression du potentiel puisque c'est son évolution dans l'espace qui nous intéressera par la suite.

Les calculs de l'annexe II.A nous permettent d'écrire :

$$\phi^{(3)}(r,m,k,\omega) = \sum_{\mu}\varphi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)\,\psi^{(3)}_{\mu,m,k}(r)$$

expression où $\varphi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)$ est donné par :

$$\varphi^{(3)}(m,\kappa,\omega,\mu) = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa^2 \varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega''}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa''}{2\pi} \sum_{m',\mu'} \kappa' \times \varphi^{(1)}(m',\kappa',\omega',\mu') \sum_{\mu'',\eta',\eta''} (\kappa-\kappa'-\kappa'') \varphi^{(1)}\begin{pmatrix} m-m'-m'' \\ \kappa-\kappa'-\kappa'' \\ \omega-\omega'-\omega'' \\ \eta' \end{pmatrix} \kappa'' \varphi^{(1)}(m'',\kappa'',\omega'',\eta'') E(\kappa,\kappa',\kappa'') \tag{II.25}$$

expression où $\omega \neq \omega'$ et où E (k,k',k") est tel que :

$$E(\kappa,\kappa',\kappa'') = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{I(\kappa-\kappa',\kappa'') G^{(2)}\begin{pmatrix} \kappa-\kappa' \\ \kappa-\kappa'-\kappa'' \\ \kappa'' \end{pmatrix} G^{(2)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa')}{(\kappa-\kappa') \varepsilon_L(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega',\mu'')} \left[I(\kappa,\kappa-\kappa') + I(\kappa,\kappa') \right] + I(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa'') G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa'') \tag{II.26}$$

rappelons que :

$$I(\kappa,\kappa') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, D^{(2)}_{\kappa,\kappa'} \quad \text{et} \quad I(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa'') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, D^{(3)}_{\kappa,\kappa-\kappa',\kappa''}$$

et

$$G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa'') = -\frac{1}{S} \int_0^R dr\, 2\pi r N^2(r) \psi_{\mu,m,\kappa}(r) \psi_{\mu',m',\kappa'}(r) \psi^{(r)}_{\eta',m-m'-m',\kappa-\kappa'-\kappa''} \psi_{\eta'',m'',\kappa''}(r) \tag{II.27}$$

II.5 EVOLUTION DU POTENTIEL

Dans ce chapitre, nous nous intéressons exclusivement à l'évolution du spectre, et nous cherchons à obtenir la variation de chaque composante du potentiel en fonction de la distance. Plusieurs hypothèses sont nécessaires à la poursuite du calcul :

- nous supposons que les modes sont "piqués" dans l'espace des k, ce qui implique qu'il n'y ait pas mécanisme d'élargissement de résonance.

- nous employons l'hypothèse des phases aléatoires

- nous négligeons les termes de couplage résonnant à trois ondes.

II.5-1 Les modes sont piqués dans l'espace des k

Nous supposons que :

$$\varphi(m,\kappa,\omega,\mu) = \varphi_\kappa(m,z,\omega,\mu)\, 2\pi\, \delta[\kappa - \kappa(\omega)] \qquad \text{(II.28)}$$

les intégrations en k se font alors aisément.

II(25) s'écrit :

$$\varphi^{(3)}(m,\kappa,\omega,\mu) = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa^2 \varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega''}{2\pi}\, \kappa'(\omega')\, \varphi_\kappa^{(1)}\, \varphi^{(1)}_{\kappa-\kappa'-\kappa''}$$

$$\left[\kappa - \kappa'(\omega') - \kappa''(\omega'')\right] \kappa''(\omega'')\, \varphi^{(1)}_{\kappa''}\, E\left[\kappa, \kappa'(\omega')\kappa''(\omega'')\right] 2\pi\, \delta[\kappa - \kappa(\omega)] \qquad \text{(II.29)}$$

II.5-2 Hypothèse des phases aléatoires

Définissons une valeur moyenne dans le temps :

(II.30) $$\frac{1}{T}\int dt\ \varphi_k(m,z,\omega,\mu)\,\varphi_k(m',z,\omega',\mu')$$

$$= \frac{1}{T}\,2\pi\,\delta(\omega-\omega')\,\delta_{\mu\mu'}\,\delta_{mm'}\,\varphi_k\,\varphi_k^*(m,z,\omega,\mu)$$

$$= \boxed{2\pi\,\delta(\omega-\omega')\,\delta_{\mu\mu'}\,\delta_{mm'}\,\langle\varphi_k\,\varphi_k^*(m,z,\omega,\mu)\rangle}$$

où $\delta_{\mu\mu'}$ et $\delta_{mm'} = 0$ si $\begin{cases}\mu\neq\mu'\\ m\neq m'\end{cases}$ et $=1$ si $\begin{cases}\mu=\mu'\\ m=m'\end{cases}$

Appliquons ce moyennage à la fonction $\phi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)$.

Les calculs effectués dans l'annexe II.B permettent d'écrire :

$$\varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)\langle\varphi_\kappa^{(3)}\,\varphi_\kappa^{(3)*}(m,z,\omega,\mu)\rangle$$

(II.31) $$= -\frac{q}{\varepsilon_0}\sum_{m',\mu'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\,\kappa'^2\langle\varphi_{\kappa'}^{(1)}\,\varphi_{\kappa'}^{(1)*}(m',z,\omega',\mu')\rangle\langle\varphi_\kappa^{(1)}\,\varphi_\kappa^{(1)}(m,z,\omega,\mu)\rangle\,J_{\kappa,\kappa'}$$

avec

$$J_{\kappa,\kappa'} = -\frac{q\varepsilon_0}{m_e^2}\,\frac{\kappa(\kappa-\kappa')^6}{(\kappa\omega'-\omega\kappa')^4}\left[G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa,\kappa') - \left[G^{(2)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa')\right]^2\right]\left[\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa',\omega-\omega')-1\right]$$

où ε_∞ $(k-k',\ \omega-\omega')$ est une quantité non résonnante.

$\varepsilon_L(k,\omega,m,\mu)$ est une quantité résonnante qui comprend une partie réelle ε_{LR} et une partie imaginaire ε_{Li} et qui peut être développée autour de $\varepsilon_{LR}=0$ (hypothèse de faible turbulence).

$$\varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu) = \varepsilon_{LR}(m,\kappa,\omega,\mu) + i\,\varepsilon_{Li}(m,\kappa,\omega,\mu)$$

en posant, de manière habituelle $k = k_r + ik_i$

$$\varepsilon_{LR}(m,\kappa,\omega,\mu) = \underbrace{\varepsilon_{LR}(\kappa_r,\omega,m,\mu)}_{\equiv 0} + i\kappa_i \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \kappa}$$

Par définition, l'amortissement de Landau k_i^L est tel que :

$$\kappa_i^L = - \frac{\varepsilon_{Li}}{\frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \kappa}}$$

Introduisons un amortissement Landau non linéaire

$$\kappa_i^{NL} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}$$

Nous pouvons réécrire le terme de gauche de l'expression (II.31) en tenant compte de ce qui précède et en supprimant les indices pour les potentiels. Il s'écrit :

$$i\left[-\kappa_i^L \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \kappa} + \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \kappa} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}\right] \left\langle \varphi_\kappa \varphi_\kappa^* (m,z,\omega,\mu) \right\rangle$$

Il résulte :

$$\left(-2\kappa_i^L + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left\langle \varphi_\kappa \varphi_\kappa^* (m,z,\omega,\mu) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \kappa}} \text{Imaginaire} \left\{ - \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\substack{m' \\ \mu'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \kappa'^2 \left\langle \varphi_\kappa \varphi_\kappa^* \right\rangle \left\langle \varphi_{\kappa'} \varphi_{\kappa'}^* \right\rangle J_{\kappa,\kappa'} \right\} \quad \text{(II.32)}$$

Nous devons exprimer la partie imaginaire de $J_{k,k'}$, c'est-à-dire la partie imaginaire de $\varepsilon_\infty (k-k', \omega-\omega')$.

II.5-3 Expression de $I_m \left[\bar{\varepsilon}_\infty (k-k', \omega-\omega')\right]$

$$\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1 = \frac{q^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\kappa-\kappa'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(\omega-\omega')-(\kappa-\kappa')\nu} \frac{dF_0(\nu)}{d\nu}$$

Les ondes qui se propagent dans le plasma sont de forme $\exp i(k_r + i k_i) z$.

Le terme $\frac{\omega - \omega'}{\kappa - \kappa'}$ peut s'écrire $\frac{(\omega - \omega')(\kappa - \kappa')^*}{|\kappa - \kappa'|^2}$

c'est-à-dire :

$$\frac{(\omega - \omega')(\kappa^* - \kappa'^*)}{|\kappa - \kappa'|^2} = \frac{(\omega - \omega')(\kappa_r - \kappa_r')}{|\kappa - \kappa'|^2} - \frac{i(\kappa_i - \kappa_i')}{|\kappa - \kappa'|^2}$$

on sait que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\upsilon - \underbrace{\frac{(\omega - \omega')(\kappa_r - \kappa_r')}{|\kappa - \kappa'|^2}}_{\upsilon_0} - i\varepsilon} = \frac{P.P.}{\upsilon - \upsilon_0} + i\pi\delta(\upsilon - \upsilon_0)$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a) = f(a)$, nous obtenons :

$$Im\left\{\varepsilon_\infty(\kappa - \kappa', \omega - \omega')\right\} = -\frac{q^2\pi}{m_e \varepsilon_0 (\kappa - \kappa')^2} \left(\frac{dF_0}{d\upsilon}\right)_{\upsilon_0 = \frac{\omega - \omega'}{\kappa - \kappa'}} \frac{\kappa - \kappa'}{|\kappa - \kappa'|}$$

La quantité $\frac{\kappa - \kappa'}{|\kappa - \kappa'|}$ sera notée indifféremment :

$\frac{\omega - \omega'}{|\omega - \omega'|}$, signe de (k-k') ou signe de (ω-ω').

A l'aide de ces résultats, nous pouvons écrire une équation intégro différentielle pour l'évolution du potentiel.

II.5-4 Evolution spatiale de $\langle \varphi_\kappa \varphi_\kappa^*(m, z, \omega, \mu) \rangle$

Cette quantité pourra être abrégée dans la suite de ce manuscrit en $\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \rangle$.

La variation selon la distance de $\langle \varphi_\kappa \varphi_\kappa^*(z) \rangle$ est donnée par :

$$(II.33)\quad \frac{\partial}{\partial z}\left\langle \varphi_k \varphi_k^*(m,z,\omega,\mu)\right\rangle = -2K_i^2\left\langle \varphi_k \varphi_k^*(m,z,\omega,\mu)\right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\sum_{m',\mu,\mu'} W(\omega,\omega')\left\langle \varphi_k \varphi_k^*(m,z,\omega,\mu)\right\rangle\left\langle \varphi_{k'} \varphi_{k'}^*(m',z,\omega',\mu')\right\rangle$$

où :

$$(II.34)\quad W(\omega,\omega') = \frac{2\pi q^4 (k-k')^4 k'^2}{\varepsilon_0 m_e^3 (k\omega'-k'\omega)^4}\,\frac{\left[G^{(3)}-(G^{(2)})^2\right]}{\dfrac{\partial \varepsilon_{LR}(m,k,\omega,\mu)}{\partial k}}\,\frac{dF_0}{dv}\,Signe(k-k')$$

La quantité $G^{(3)}-\underline{/}\bar{G}^{(2)}\underline{/}^2 = G$ sera calculée numériquement au chapitre III. Remarquons que la quantité $W(\omega,\omega')$ dépend de la valeur de G, qui caractérise la structure radiale des potentiels, et de la partie réelle de la relation de dispersion exprimée en géométrie finie.

Les fonctions $\psi_{\mu mk}(r)$ sont telles que :

$$(II.35)\quad \psi_{\mu,m,k}(r) = \frac{J_m\left(\alpha_{m\mu}\frac{r}{R}\right)}{J_m'(\alpha_{m\mu})}$$

où $\alpha_{m\mu}$ est la valeur du μième zéro de la fonction de Bessel de première espèce J_m (J'_m est la dérivée de J_m).

On peut montrer que :

$$(II.36)\quad \varepsilon_L(m,k,\omega,\mu) = \varepsilon_\infty(k,\omega) + \left(\frac{\alpha_{m\mu}}{kR}\right)^2$$

II.5-5 Cas d'un milieu infini radialement

Si les effets de géométrie finie sont supprimés, on obtient une équation d'évolution analogue, à celle obtenue dans le cas

temporel [5,6].

II.6 EXPRESSION DES RESULTATS DANS LE CAS D'UNE RELATION DE DISPERSION PARTICULIERE EXPERIMENTALE

L'étude de l'expression (II.33) est faite en tenant compte des conditions expérimentales :

- d'une part, les ondes du spectre de turbulence se propagent dans la colonne de plasma avec le mode fondamental m=0 ; μ=1.

- d'autre part, les fréquences du spectre de turbulence injecté dans le plasma, voisines de la fréquence plasma ω_{pe}, sont telles que la relation de dispersion $\varepsilon_{LR}(\omega,k)$ peut être très bien représentée par une droite dans le domaine de fréquences couvrant le spectre.

- enfin, la fonction de distribution initiale est maxwellienne.

Nous poserons donc :

$$\varepsilon_{LR}(m=0, k, \omega, \mu=1) = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{k v_g}{\omega} \qquad \text{(II.37)}$$

Nous verrons qu'une telle expression pour $\varepsilon_{LR}(k,\omega)$ implique la constance de la vitesse de groupe des ondes du spectre de turbulence. Du fait d'une telle constante diélectrique, un couplage résonnant entre trois ondes du spectre ne peut exister. Par contre un couplage à quatre ondes peut intervenir, et nous aborderons ce mécanisme au chapitre IV.

Pour un plasma dont la fonction de distribution initiale des électrons est une maxwellienne limitée aux vitesses positives $F_0(v)$ s'écrit :

$$F_0(v) = \frac{\sqrt{2}\, n_0}{\sqrt{\pi}\, v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{2 v_{th}^2}\right) \qquad \text{(II.38)}$$

A partir des expressions (II.37) et (II.38), $W(\omega,\omega')$ a la forme suivante :

$$(II.39)\quad W(\omega,\omega') = -\frac{2\sqrt{2\pi}\,G\,q^4 n_0 (\omega'-\Omega)^2 \omega}{\varepsilon_0 m_e^3 \Omega^4 v_{th}^3 v_g^2} \exp\left(-\frac{v_g^2}{2v_{th}^2}\right) \text{Signe}(\omega-\omega')$$

car $\quad \dfrac{\omega-\omega'}{k-k'} = v_g$

II.7 EXISTENCE D'UNE ONDE FORCEE DE BATTEMENT

La résolution au second ordre du potentiel permet de montrer la présence d'un champ de battement à partir de deux ondes (k_1,ω_1), (k_2,ω_2) du spectre de turbulence.

Posons $k=k_2-k_1$; $\omega=\omega_2-\omega_1$; $m=0$; $\mu=1$

$$(II.40)\quad \varphi^{(2)}(k,\omega) = \frac{q}{2m_e \varepsilon_L(k,\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \varphi^{(1)}(k_1,\omega_1)\, \varphi^{(1)}(k_2,\omega_2)$$

$$\times \frac{k_1(k_2-k_1)}{k_2(k_2\omega_1-k_1\omega_2)^2} \left\{ k_2^3\left[\varepsilon_\infty(k_2,\omega_2)-1\right] - (k_2-k_1)^3\left[\varepsilon_\infty\left(\frac{k_2-k_1}{\omega_2-\omega_1}\right)-1\right] - k_1^3\left[\varepsilon_\infty(k_1,\omega_1)-1\right] \right\}$$

II.8 CONSERVATION DU FLUX DE PLASMONS

Dans le cas spatial, le flux de plasmons par unité de fréquence $\mathcal{F}(\omega,z)$ joue le même rôle que le nombre de plasmons dans le cas temporel. Ce nombre de plasmons se conserve par effet Landau non linéaire [5,6].

Montrons que dans le cas du spectre de turbulence étudié, le flux de plasmons se conserve sur la longueur de la colonne quand l'amortissement naturel est négligé.

Expression du flux de plasmons par unité de fréquence :

La variable accessible à l'expérience est la puissance $P(\omega,z)$ traversant une section de la colonne de plasma par unité de fréquence.

$$(II.41)\quad P(\omega,z) = \frac{\varepsilon_0 K^2}{2} \langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \rangle \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\omega \varepsilon_{LR}\right) v_g S$$

expression qui sera justifiée au chapitre VII et qui est valable pour $N(r)=1$.

Le flux de plasmons $\mathcal{F}(\omega,z)$ est tel que :

$$(II.42)\quad \mathcal{F}(\omega,z) = \frac{P(\omega,z)}{\omega}$$

L'évolution de $\mathcal{F}(\omega,z)$ est obtenue à partir de l'expression (II.33).

$$(II.43)\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}(\omega,z) = -2K_i^{\perp}\mathcal{F}(\omega,z) - \beta\int_0^{\infty} d\omega'\, \omega\omega' \mathcal{F}(\omega,z)\mathcal{F}(\omega',z)\,\mathrm{Signe}(\omega-\omega')$$

β est calculé dans le cas particulier du paragraphe (II.6), à partir de l'expression (II.39).

$$(II.44)\quad \beta = \frac{2\sqrt{2}\, q^4 n_0 G}{\sqrt{\pi}\, S\, m_e^3 \varepsilon_0^2 \Omega^4 v_{th}^3 v_g} \exp\left(-\frac{v_g^2}{2v_{th}^2}\right)$$

Nous supposons maintenant que dans l'expression (II.43) nous pouvons faire $\omega \sim \omega' = \bar{\omega}$. L'évolution du flux s'écrit alors :

$$(II.45)\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}(\omega,z) = -2K_i^{\perp}\mathcal{F}(\omega,z) - \beta\bar{\omega}^2\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, \mathcal{F}(\omega,z)\mathcal{F}(\omega',z)\,\mathrm{Signe}(\omega-\omega')$$

Dans le cas où l'on néglige l'amortissement Landau k_i^L, nous pouvons calculer le flux total de plasmons $\mathcal{F}_T = \int_0^\infty \mathcal{F}(\omega, z)\, d\omega$ relié à la puissance totale traversant une section S de plasma.

$$(II.46)\quad \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty \mathcal{F}(\omega,z)\,d\omega = -\frac{1}{L}\beta\bar{\omega}^2\int_0^\infty d\omega\int_0^\infty d\omega'\left[\text{Signe}(\omega-\omega')+\text{Signe}(\omega'-\omega)\right]\mathcal{F}(\omega,z)\mathcal{F}(\omega',z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_T = 0 \Rightarrow \underline{\text{le flux } \mathcal{F}_T \text{ se conserve spatiallement.}}$$

Définissons la quantité : $\mathcal{F}_\omega(z) = \int_0^\omega \mathcal{F}(\omega, z)\, d\omega$

$$(II.47)\quad \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\omega \mathcal{F}(\omega,z)\,d\omega = -\beta\bar{\omega}^2\int_0^\omega d\omega\int_0^\infty d\omega'\,\mathcal{F}(\omega,z)\mathcal{F}(\omega',z)\,\text{Signe}(\omega-\omega')$$

Or : $\int_0^\infty \mathcal{F}(\omega',z)\,d\omega'\,\text{Signe}(\omega-\omega') = -\int_0^\omega \mathcal{F}(\omega',z)\,d\omega' - \int_\omega^\infty \mathcal{F}(\omega',z)\,d\omega'$

$$(II.48)\quad \int_0^\infty \mathcal{F}(\omega',z)\,d\omega'\,\text{Signe}(\omega-\omega') = 2\int_0^\omega \mathcal{F}(\omega',z)\,d\omega' - \mathcal{F}_T$$

Compte tenu de (II.48), (II.47) s'écrit :

$$(II.49)\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_\omega(z) = +\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_\omega(z)\left[-2\mathcal{F}_\omega(z)+\mathcal{F}_T\right]$$

l'équation (II.49) peut être intégrée car :

$$(II.50)\quad \frac{1}{\mathcal{F}_\omega(z)}\,\frac{\partial \mathcal{F}_\omega(z)}{\partial z} = \beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T - \beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_\omega(z)$$

En posant :

$$(II.51)\quad \mathcal{F}_\omega(z) = \frac{A}{1 - B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)}$$

On trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\omega(z)}{\partial z} = \frac{-\mathcal{F}_\omega(z)\; B\,\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T \exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)}{1 - B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)}$$

Soit :

$$-\frac{B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)\,\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T}{1 - B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)} = \frac{-\beta\bar{\omega}^2 A}{1 - B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)} + \beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T$$

En identifiant les termes, on trouve :

$$A = \mathcal{F}_T$$

$$(II.52)\quad \mathcal{F}_\omega(z) = \frac{\mathcal{F}_T}{1 - B\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)}$$

Compte tenu de la connaissance de :

$$\mathcal{F}_\omega(z=0) = \int_0^\omega \mathcal{F}(\omega, z=0)\,d\omega$$

$$\mathcal{F}_\omega(z=0) = \frac{\mathcal{F}_T}{1 - B}$$

B s'écrit :

$$(II.53) \quad B = \frac{\mathcal{F}_\omega(z=0) - \mathcal{F}_T}{\mathcal{F}_\omega(z=0)} = 1 - \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{F}_\omega(z=0)}$$

d'où :

$$(II.54) \quad \boxed{\mathcal{F}_\omega(z) = \frac{\mathcal{F}_T}{\left\{1 - \left[1 - \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{F}_\omega(z=0)}\right] \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)\right\}}}$$

$\mathcal{F}(\omega,z)$ se calcule à partir de $\mathcal{F}_\omega(z)$ par la relation :

$$\mathcal{F}(\omega, z) = \frac{\partial \mathcal{F}_\omega(z)}{\partial \omega}$$

Soit :

$$(II.55) \quad \boxed{\mathcal{F}(\omega,z) = \frac{\mathcal{F}(\omega, z=0) \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)}{\left\{\frac{\mathcal{F}_\omega(z=0)}{\mathcal{F}_T}\left[1 - \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)\right] + \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)\right\}^2}}$$

La frontière entre le domaine croissant et le domaine décroissant est telle que :

$$(II.56) \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(\omega, z) = 0$$

Ceci entraîne, d'après l'expression (II.49) et toujours dans le cas où l'amortissement Landau est négligé :

$$\mathcal{F}_\omega(z) = \frac{\mathcal{F}_I}{2}$$

Soit :

$$\exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T\, z\right) = \frac{\mathcal{F}_\omega(z=0)}{\mathcal{F}_T - \mathcal{F}_\omega(z=0)}$$

C'est-à-dire pour une valeur de :

(II.57)
$$\boxed{z = \frac{1}{\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T}\ \mathrm{Log}_e\left[\frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{F}_\omega(z=0)} - 1\right]}$$

z étant une valeur positive, la croissance se fait pour les ondes telles que le flux

$$\mathcal{F}_\omega(z=0) < \frac{\mathcal{F}_T}{2}$$

En conclusion, on peut définir d'après la relation (II.57), une zone de fréquences pour laquelle le flux $\mathcal{F}(\omega,z)$ croît avec la distance, pour un flux $\mathcal{F}(\omega,z=0)$ donné. Pour une valeur initiale du flux $\mathcal{F}(\omega,z=0)$ représentée sur le schéma II.2, la valeur de la fréquence

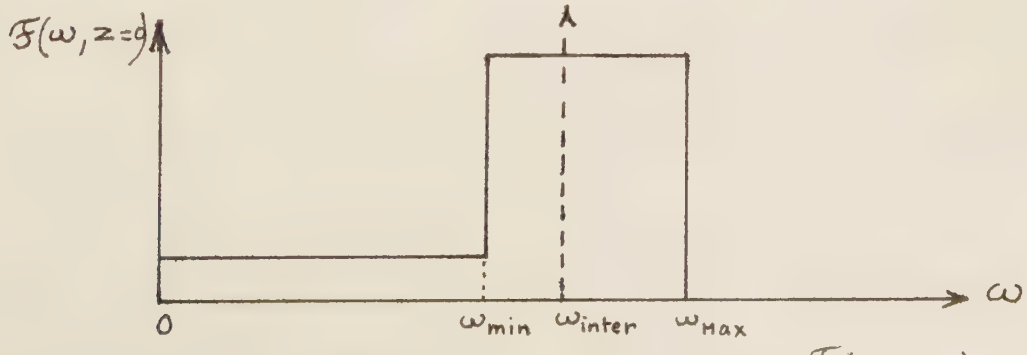


Schéma II.2 Flux initial $\mathcal{F}(\omega,z=0)$

correspondant à un taux de croissance (ou de décroissance) nul est $\frac{\omega_{inter}}{2\pi}$ telle que les deux aires définies par les axes, la courbe $\mathcal{F}(\omega,z)$ avant et après ω_{inter} soient égales.

Pour une onde de fréquence $F = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{\omega_{inter}}{2\pi}$, le taux de croissance de $\mathcal{F}(\omega,z)$ est proportionnel à la différence des aires après et avant la valeur ω.

Un amortissement se produit pour les composantes de fréquence supérieure à $\frac{\omega_{inter}}{2\pi}$.

II.9 CONCLUSION

Dans l'approximation de la turbulence faible, l'étude de l'évolution d'un spectre de turbulence par mécanisme d'effet Landau non linéaire vient d'être faite, en tenant compte des paramètres expérimentaux particuliers, comme l'allure de la courbe de dispersion et le profil des modes se propageant dans le plasma.

La comparaison avec les mesures concernant, l'évolution du spectre vers les basses fréquences, la présence d'une onde forcée correspondant à chaque couple de fréquences du spectre, et la conservation spatiale du flux de plasmons peut ainsi être plus justement faite.

ANNEXE II.A

CALCUL DU POTENTIEL ET DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION AU TROISIEME ORDRE

Ecrivons l'expression (II.23)

$$(II.A\,1)\quad f^{(3)}(r,m,k,v,\omega) = K\,\phi^{(3)}(r,m,k,\omega)\,D_k^{(1)}\,N(r)$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{m'}K'\phi^{(1)}(r,m,k',\omega')\left\{-\frac{q}{me}\,\frac{1}{\omega-kv}\,\frac{\partial f^{(2)}}{\partial v}\begin{pmatrix} r \\ m-m' \\ k-k' \\ v \\ \omega-\omega'\end{pmatrix}\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{m'}(k-k')\,\phi^{(2)}\begin{pmatrix} r \\ m-m' \\ k-k' \\ \omega-\omega'\end{pmatrix}\left\{-\frac{q}{me}\,\frac{1}{\omega-kv}\,\frac{\partial f^{(1)}}{\partial v}(r,m',k',v,\omega')\right\}$$

Pour obtenir par exemple $f^{(2)}(r,m-m',k-k',v,\omega-\omega')$, nous effectuons les changements suivants dans l'expression (II.22).

$$k-k' \longrightarrow k-k'-k'' \;;\quad \omega-\omega' \longrightarrow \omega-\omega'-\omega'' \;;$$

$$m-m' \longrightarrow m-m'-m'' \;;$$

$$k \longrightarrow k-k' \;;\quad \omega \longrightarrow \omega-\omega' \;;\quad m \longrightarrow m-m' \;;$$

$$k' \longrightarrow k'' \;;\quad \omega' \longrightarrow \omega' \;;\quad m' \longrightarrow m'' \;.$$

$f^{(2)}$ (r,m-m',k-k';v,ω-ω') s'écrit :

$$(\text{II.A.2})\quad f^{(2)}\left(r,m-m',\kappa-\kappa',\nu,\omega-\omega'\right)=\sum_{\mu''}\frac{q}{\varepsilon_0(\kappa-\kappa')\,\varepsilon_L\left(m-m',\kappa-\kappa';\omega-\omega',\mu''\right)}$$
$$\times\int\frac{d\omega''}{2\pi}\int\frac{d\kappa'}{2\pi}\sum_{m'',\eta',\eta''}(\kappa-\kappa'-\kappa'')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'-m''\\ \kappa-\kappa'-\kappa''\\ \omega-\omega'-\omega''\\ \eta'\end{pmatrix}\kappa''\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m''\\ \kappa''\\ \omega''\\ \eta''\end{pmatrix}$$
$$\times I\left(\kappa-\kappa',\kappa''\right)G^{(2)}\left(\kappa-\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa''\right)\times D^{(1)}_{\kappa-\kappa'}$$

$$\times\,\psi_{\mu'',m-m',\kappa-\kappa'}(r)\,N(r)$$

$$+\int\frac{d\omega''}{2\pi}\int\frac{d\kappa''}{2\pi}\sum_{m'',\eta',\eta''}(\kappa-\kappa'-\kappa'')\,\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'-m''\\ \kappa-\kappa'-\kappa''\\ \omega-\omega'-\omega''\\ \eta'\end{pmatrix}\kappa''\,\varphi^{(1)}\left(m'',\kappa'',\omega'',\eta''\right)$$
$$\times D^{(2)}_{\kappa-\kappa',\kappa''}\,N(r)\,\psi_{\eta',m-m'-m'',\kappa-\kappa'-\kappa''}(r)\,\psi_{\eta'',m'',\kappa''}(r)$$

avec $$I\left(\kappa-\kappa',\kappa''\right)=\int d\nu\, D^{(2)}_{\kappa-\kappa',\kappa''}$$

Nous avons besoin des expressions : $\phi^{(2)}\left(r,m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega'\right)$, $\phi^{(1)}\left(r,m',\kappa',\omega'\right)$ et $f^{(1)}\left(r,m',\kappa',\omega',\nu\right)$

$$\phi^{(2)}\left(r,m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega'\right)=\sum_{\mu''}\varphi^{(2)}\left(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega',\mu''\right)\psi_{\mu'',\kappa-\kappa',m-m'}(r)$$

$$\phi^{(1)}\left(r,m',\kappa',\omega'\right)=\sum_{\mu'}\varphi^{(1)}\left(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega'\right)\psi_{\mu',m',\kappa'}(r)$$

$$f^{(1)}\left(r,m',\kappa',\nu,\omega'\right)=\kappa'\,\phi^{(1)}\left(r,m',\kappa',\omega'\right)D^{(1)}_{\kappa'}N(r)$$

(II.A.3)

$$\phi^{(3)}(r, m-m', \kappa-\kappa', \omega-\omega')$$
$$= \sum_{\mu''} \frac{q}{\varepsilon_0} (\kappa-\kappa')^2 \, \varepsilon_L(m-m', \kappa-\kappa', \omega-\omega', \mu'') \int \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d\kappa''}{2\pi}$$
$$\times \sum_{m'', \eta', \eta''} (\kappa-\kappa'-\kappa'') \, \varphi^{(1)}\begin{pmatrix} m-m'-m'' \\ \kappa-\kappa'-\kappa'' \\ \omega-\omega'-\omega'' \\ \eta' \end{pmatrix} \kappa'' \, \varphi^{(1)}(m'', \kappa'', \omega'', \eta'')$$
$$\times I(\kappa-\kappa', \kappa'') \, G^{(2)}(\kappa-\kappa', \kappa-\kappa'-\kappa'', \kappa'') \, \Psi_{\mu'', m-m', \kappa-\kappa'}(r)$$

Nous pouvons écrire $f^{(3)}(r,m,k,v,\omega)$

$$f^{(3)}(r, m, k, v, \omega) = \kappa \, \phi^{(3)}(r, m, \kappa, \omega) \, D^{(1)}_{\kappa} \, N(r)$$

(II.A.4)

$$+ \frac{q}{\varepsilon_0} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\kappa'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d\kappa''}{2\pi} \sum_{m', \mu', \mu''} \kappa' \varphi^{(1)}(m', \kappa', \omega', \mu') \sum_{m'', \eta', \eta''} (\kappa-\kappa'-\kappa'')$$
$$\times \varphi^{(1)}(m-m'-m'', \kappa-\kappa'-\kappa'', \omega-\omega'-\omega'', \eta') \, \kappa'' \, \varphi^{(1)}(m'', \kappa'', \omega'', \eta'') \, D^{(2)}_{\kappa, \kappa-\kappa'} \, N(r)$$
$$\times I(\kappa-\kappa', \kappa'') \, \Psi_{\mu', m', \kappa'}(r) \, \Psi_{\mu'', m-m', \kappa-\kappa'}(r) \, \frac{G^{(2)}(\kappa-\kappa', \kappa-\kappa'-\kappa'', \kappa'')}{(\kappa-\kappa') \, \varepsilon_L(m-m', \kappa-\kappa', \omega-\omega', \mu'')}$$

$$+ \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\kappa'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d\kappa''}{2\pi} \sum_{m', \mu'} \kappa' \varphi^{(1)}(m', \kappa', \omega', \mu') \sum_{m'', \eta', \eta''} (\kappa-\kappa'-\kappa'')$$
$$\times \varphi^{(1)}(m-m'-m'', \kappa-\kappa'-\kappa'', \omega-\omega'-\omega'', \eta') \, \kappa'' \, \varphi^{(1)}(m'', \kappa'', \omega'', \eta'') \, D^{(3)}_{\kappa, \kappa-\kappa', \kappa''}$$
$$\times N(r) \, \Psi_{\mu', m', \kappa'}(r) \, \Psi_{\eta', m-m'-m'', \kappa-\kappa'-\kappa''}(r) \, \Psi_{\eta'', m'', \kappa''}(r)$$

$$+ \frac{q}{\varepsilon_0} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\kappa'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d\kappa''}{2\pi} \sum_{m', \mu', \mu''} \kappa' \varphi^{(1)}(m', \kappa', \omega', \mu') \sum_{m'', \eta', \eta''} (\kappa-\kappa'-\kappa'')$$
$$\times \varphi^{(1)}\begin{pmatrix} m-m'-m'' \\ \kappa-\kappa'-\kappa'' \\ \omega-\omega'-\omega'' \\ \eta' \end{pmatrix} \kappa'' \, \varphi^{(1)}(m'', \kappa'', \omega'', \eta'') \, D^{(2)}_{\kappa, \kappa'} \, I(\kappa-\kappa', \kappa'') \, N(r)$$
$$\times \Psi_{\mu', m', \kappa'}(r) \, \Psi_{\mu'', m-m', \kappa-\kappa'}(r) \, \frac{G^{(2)}(\kappa-\kappa', \kappa-\kappa'-\kappa'', \kappa'')}{(\kappa-\kappa') \, \varepsilon_L(m-m', \kappa-\kappa', \omega-\omega', \mu'')}$$

Nous obtenons le potentiel à partir de l'expression :

$$(II.A.5)\quad \phi^{(3)}(r,m,\kappa,\omega) = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa^2 \lambda_{m\mu}(\kappa) N(r)} \int f^{(3)}(r,m,\kappa,v,\omega)\, dv$$

Considérons la projection de $\phi^{(3)}(r,m,k,\omega)$ sur le vecteur propre $\psi_{\mu,m,k}(r)$.

$$(II.A.6)\quad \varphi^{(3)}(m,\kappa,\omega,\mu) = \frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\, dr\, N(r)\, \phi^{(3)}(r,m,\kappa,\omega)\, \psi_{\mu,m,\kappa}(r)$$

en reprenant la valeur de $f^{(3)}(r,m,k,v,\omega)$, nous pouvons obtenir $\varphi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)$. Pour cela nous posons :

$$(II.A.7)\quad G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa'') = \frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\, dr\, N^2(r)\, \psi_{\mu,m,\kappa}(r)\, \psi_{\mu',m',\kappa'}(r)\, \psi_{\eta',\substack{m-m'-m''\\ \kappa-\kappa'-\kappa''}}(r)\, \psi_{\eta'',m'',\kappa''}(r)$$

et :

$$(II.A.8)\quad E\left(\kappa,\kappa',\kappa''\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\,\frac{I\left(\kappa-\kappa',\kappa''\right)\left[I\left(\kappa,\kappa-\kappa'\right)+I\left(\kappa,\kappa'\right)\right]}{\left(\kappa-\kappa'\right)\,\varepsilon_L\left(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega',\mu''\right)}$$
$$\times\, G^{(2)}\left(\kappa-\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa''\right)G^{(2)}\left(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'\right)$$
$$+\; I\left(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa''\right)G^{(3)}\left(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa''\right)$$

$\varphi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)$ s'écrit :

$$(II.A.9)\quad \boxed{\begin{aligned}\varphi^{(3)}\left(m,\kappa,\omega,\mu\right)=&\frac{q}{\varepsilon_0\kappa^2\,\varepsilon_L\left(m,\kappa,\omega,\mu\right)}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d\kappa'}{2\pi}\int\frac{d\omega''}{2\pi}\int\frac{d\kappa''}{2\pi}\\ &\times\sum_{m',\mu',\mu''}\kappa'\,\varphi^{(1)}\left(m',\kappa',\omega',\mu'\right)\sum_{m'',\eta',\eta''}\left(\kappa-\kappa'-\kappa''\right)\\ &\times\varphi^{(1)}\begin{pmatrix}m-m'-m''\\ \kappa-\kappa'-\kappa''\\ \omega-\omega'-\omega''\\ \eta'\end{pmatrix}\kappa''\,\varphi^{(1)}\left(m'',\kappa'',\omega'',\eta''\right)E\left(\kappa,\kappa',\kappa''\right)\end{aligned}}$$

le potentiel $\phi^{(3)}(r,m,k,\omega,\mu)$ s'écrit :

$$\phi^{(3)}\left(r,m,\kappa,\omega\right)=\sum_{\mu}\varphi^{(3)}\left(m,\kappa,\omega,\mu\right)\psi_{\mu,m,\kappa}\left(r\right)$$

ANNEXE II.B

APPLICATION DE L'HYPOTHESE DES PHASES ALEATOIRES AU CALCUL DU POTENTIEL AU TROISIEME ORDRE

En tenant compte des relations :

$$2\pi\,\delta(\omega', \omega-\omega'-\omega'')\,\delta_{m',\,m-m'-m''}\,\delta_{\mu',\eta'} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega'')\,\delta_{m',-m''}\,\delta_{\mu',\eta'}$$

$$2\pi\,\delta(\omega-\omega'-\omega'', \omega'')\,\delta_{m-m'-m'',\,m''}\,\delta_{\eta',\mu''} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega')\,\delta_{m,-m'}\,\delta_{\eta',\mu''}$$

et en appliquant l'hypothèse des phases aléatoires définie dans l'expression (II.30) au calcul du potentiel $\varphi^{(3)}(m,k,\omega,\mu)$ donné par l'expression (II.29), nous pouvons écrire :

$$\text{(II.B.1)}\quad \varphi^{(3)}(m,\kappa,\omega,\mu) = -\frac{q}{\varepsilon_0\,K^2\,\varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)}\,\frac{1}{T}\sum_{m',\mu'}\int\frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$\times\,2\pi\,\delta[\kappa-\kappa(\omega)]\left\{E(\kappa,\kappa',\kappa)+E(\kappa,\kappa',-\kappa')\right\}$$

$$\times\,\kappa'\,\varphi^{(1)}_{\kappa'}(m',z,\omega',\mu')\,\kappa'\,\varphi^{(1)}_{\kappa'}(-m',z,-\omega',-\mu')\,\kappa\,\varphi^{(1)}_{\kappa}(m,z,\omega,\mu)$$

Posons $\frac{1}{T}\,\varphi^{(1)}_{\kappa'}(m',z,\omega',\mu')\,\varphi^{(1)}_{\kappa'}(-m',z,-\omega',-\mu') = \left\langle \varphi_{\kappa'}\,\varphi^{*}_{\kappa'}(m',z,\omega',\mu')\right\rangle$

Ce qui donne :

$$\text{(II.B.2)}\quad \varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)\,\varphi^{(3)}(m,\kappa,\omega,\mu)$$

$$= -\frac{q}{\varepsilon_0 \kappa^2} \sum_{m',\mu'} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, 2\pi\, \delta[\kappa-\kappa(\omega)] \left\{ E(\kappa,\kappa',\kappa) + E(\kappa,\kappa',-\kappa') \right\}$$

$$\times \left\langle \varphi^{(1)}_{\kappa'}\, \varphi^{(1)*}_{\kappa'}(m',z,\omega',\mu') \right\rangle \kappa'^2\, \kappa\, \varphi^{(1)}_{\kappa}(m,z,\omega,\mu)$$

Appliquons à la relation (II.B.2), l'opération suivante :

$$\text{(II.B.3)}\quad \left\langle \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \int \frac{d\kappa_q}{2\pi} \int d\kappa \left[\text{relation B 2}\right] \varphi^{*}_{\kappa_q}(m_q,z,\omega_q,\mu_q)\, e^{+i(\kappa-\kappa_q)z} \right\rangle$$

Après cette opération, le membre de gauche de l'équation (II.B.2) devient :

$$\text{(II.B.4)}\quad \boxed{\varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu) \left\langle \varphi_\kappa\, \varphi^{*}_{\kappa}(m,z,\omega,\mu) \right\rangle}$$

Le membre de droite devient :

$$\text{(II.B.5)}\quad \frac{1}{T} \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \int \frac{d\kappa_q}{2\pi} \int d\kappa \left(-\frac{q}{\varepsilon_0 \kappa^2} \right) \sum_{m',\mu'} \left\{ E(\kappa,\kappa',\kappa) + E(\kappa,\kappa',-\kappa') \right\}$$

$$\times \left\langle \varphi^{(1)}_{\kappa'}\, \varphi^{(1)*}_{\kappa'}(m',z,\omega',\mu') \right\rangle \kappa'^2 \kappa \int dt\, \varphi^{(1)}_{\kappa}(m,z,\omega,\mu)$$

$$\times \varphi^{(1)}_{\kappa_q}(m_q,z,\omega_q,\mu_q) \exp\left[+i(\kappa-\kappa_q)z\right] \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, 2\pi\, \delta[\kappa-\kappa(\omega)]$$

l'expression (II.B.5) peut s'écrire après intégration sur dkq:

$$-\frac{q}{\varepsilon_0 k}\sum_{m',\mu'}\frac{1}{T}\int\frac{d\omega_q}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\left\{E(k,k',k)+E(k,k',-k')\right\}\left\langle\varphi^{(1)}_{k'}\,\varphi^{*(1)}_{k'}(m',z,\omega',\mu')\right\rangle$$

$$\times k'^2\,\varphi^{(1)}_{k}(m,z,\omega,\mu)\,\varphi^{(1)}_{kq}(m_q,z,\omega_q,\mu_q)\exp\left\{i[\kappa(\omega)-\kappa(\omega_q)]z\right\}$$

$$\times\,2\pi\,\delta(\omega-\omega_q)\,\delta_{m,m_q}\,\delta_{\mu,\mu_q}$$

Après intégration sur dωq, l'expression (II.B.5) s'écrit :

(II.B.6)
$$\boxed{-\frac{q}{\varepsilon_0 k}\sum_{m',\mu'}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\left\{E(k,\kappa',\kappa)+E(\kappa,\kappa',-\kappa')\right\}\kappa'^2\left\langle\varphi_\kappa\,\varphi^*_\kappa\right\rangle\left\langle\varphi_{\kappa'}\,\varphi^*_{\kappa'}\right\rangle}$$

Il faut maintenant évaluer les termes E(k,k',k), E(k,k',-k').

(II.B.7)
$$E(k,\kappa',\kappa)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{I(k-\kappa',\kappa'')\left[I(\kappa,\kappa-\kappa')+I(\kappa,\kappa')\right]}{\varepsilon_L(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega',\mu'')\,(\kappa-\kappa')}$$
$$\times\,G^{(2)}(k-\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa'')\,G^{(2)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa')$$
$$+\,I(\kappa,\kappa-\kappa',\kappa'')\,G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa'-\kappa'',\kappa'')$$

(II.B.8)
$$E(\kappa,\kappa',-\kappa')=\frac{q\,I(k-\kappa',-\kappa')\,G^{(2)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa')\,G^{(2)}(k,\kappa',\kappa-\kappa')\left\{I(\kappa,\kappa-\kappa')+I(\kappa,\kappa')\right\}}{\varepsilon_0(\kappa-\kappa')\,\varepsilon_L(m-m',\kappa-\kappa',\omega-\omega',\mu'')}$$
$$+\,I(\kappa,\kappa-\kappa',-\kappa')\,G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa,-\kappa')$$

D'après les définitions des fonctions G(II.21 et II.27), ni l'ordre des variables, ni le signe ne jouent un rôle. $G^{(2)}(\kappa)=G^{(2)}(-\kappa)$

Nous pouvons écrire :

$$(II.B.9)\quad E(k,k',k) + E(k,k',-k') = \frac{q\left[G^{(2)}(k,k',k-k')\right]^2}{\varepsilon_0(k-k')\,\varepsilon_L(m-m',k-k',\omega-\omega',\mu'')}\Big\{\underbrace{\left[I(k,k-k')+I(k,k')\right]}_{A_1}\underbrace{\left[I(k-k',k)+I(k-k',-k')\right]}_{A_2}\Big\}$$

$$+\ G^{(3)}(k,k',k,k')\underbrace{\left[I(k,k-k',k)+I(k,k-k',-k')\right]}_{A_3}$$

Soit à évaluer les intégrales A_1, A_2, A_3, rappelons que :

- $I(k,k') = \int dv\ D^{(2)}_{k,k'}$
- $I(k,k-k',k'') = \int dv\ D^{(3)}_{k,k-k',k''}$
- $D^{(1)}_k = -\frac{q}{me}\frac{1}{\omega-kv}\frac{dF_0(v)}{dv}$
- $D^{(2)}_{k,k'} = \frac{q^2}{me^2}\frac{1}{(\omega-kv)}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\omega'-k'v}\frac{dF_0(v)}{dv}\right\}$
- $D^{(3)}_{k,k-k',k''} = -\frac{q}{me}\frac{1}{\omega-kv}\frac{\partial}{\partial v}\left(D^{(2)}_{k-k',k''}\right)$

Calculons I(k,k') :

$$I(k,k') = \int dv\ \frac{q^2}{me^2}\frac{1}{\omega-kv}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\omega'-k'v}\frac{dF_0}{dv}\right\}$$

Intégrons par parties :

$$I(k,k') = -\frac{q^2}{me^2}k\int\frac{1}{\omega'-k'v}\frac{1}{(\omega-kv)^2}\frac{dF_0}{dv}\,dv$$

$$I(k,k') = \frac{q^2}{me^2}k\frac{\partial}{\partial\omega}\int\frac{1}{\omega-kv}\frac{1}{\omega'-k'v}\frac{dF_0}{dv}\,dv$$

$$I(k,k') = \frac{q^2}{me^2} K \frac{\partial}{\partial \omega} \int \left[\frac{A}{\omega - kv} + \frac{B}{\omega' - k'v} \right] \frac{df_o}{dv} dv$$

En identifiant les termes, on trouve :

$$A \equiv \frac{k}{k\omega' - k'\omega}$$

$$B \equiv \frac{k'}{k'\omega - k\omega'}$$

Compte tenu de la définition de $\varepsilon_\infty(k,\omega)$, que nous rappelons :

$$\varepsilon_\infty(k,\omega) = 1 + \frac{q^2}{m_e \varepsilon_o} \frac{1}{k} \int \frac{1}{\omega - kv} \frac{dF_o}{dv} dv$$

Nous pouvons écrire :

$$\int \frac{1}{\omega - kv} \frac{dF_o}{dv} dv = \frac{k\, m_e\, \varepsilon_o}{q_e^2} \left[\varepsilon_\infty(k,\omega) - 1 \right]$$

D'où :

(II.B.10)
$$\boxed{I(k,k') = \frac{\varepsilon_o k}{m_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{k^2 \left[\varepsilon_\infty(k,\omega) - 1 \right] - k'^2 \left[\varepsilon_\infty(k',\omega') - 1 \right]}{k\omega' - k'\omega} \right\}}$$

Nous pouvons maintenant calculer les termes A_1, A_2, A_3.

Calcul de A_1 :

$$A_1 = I(\kappa, \kappa-\kappa') + I(\kappa, \kappa')$$

(II.B.11)
$$A_1 = \frac{\varepsilon_0 \kappa}{m_e [\kappa\omega' - \kappa'\omega]^2} \left\{ \kappa^3 [\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1] - (\kappa-\kappa')^3 [\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1] - \kappa'^3 [\varepsilon_\infty(\kappa', \omega') - 1] \right\}$$

Calcul de A_2 :

$$A_2 = I(\kappa-\kappa', \kappa) + I(\kappa-\kappa', -\kappa')$$

$$I(\kappa-\kappa', \kappa) = \frac{\varepsilon_0 (\kappa-\kappa')}{m_e} \frac{\partial}{\partial(\omega-\omega')} \left\{ \frac{1}{(\kappa-\kappa')\omega - \kappa(\omega-\omega')} \times \left\{ (\kappa-\kappa')^2 [\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1] - \kappa^2 [\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1] \right\} \right\}$$

$$I(\kappa-\kappa', \kappa) = \frac{\varepsilon_0 (\kappa-\kappa')}{m_e} \left\{ \frac{\kappa}{(\kappa\omega' - \kappa'\omega)^2} \left\{ (\kappa-\kappa')^2 [\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1] - \kappa^2 [\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1] \right\} + \frac{(\kappa-\kappa')^2}{\kappa\omega' - \kappa'\omega} \frac{\partial \varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega')}{\partial(\omega-\omega')} \right\}$$

en écrivant le terme I(k-k', -k'), on s'aperçoit qu'il contient au signe près le même terme en $\frac{\partial \varepsilon(\kappa-\kappa', \omega-\omega')}{\partial(\omega-\omega')}$ que I(k-k', k). Ce terme disparaît donc dans l'écriture de A_2.

(II.B.12)
$$A_2 = \frac{\varepsilon_0 (\kappa-\kappa')}{m_e (\kappa\omega' - \kappa'\omega)^2} \left\{ (\kappa-\kappa')^3 [\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1] - \kappa^3 [\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1] + \kappa'^3 [\varepsilon_\infty(-\kappa', -\omega') - 1] \right\}$$

Le produit $A_1 A_2$ s'écrit :

$$(II.B.13)\quad A_1 A_2 = -\frac{\varepsilon_0^2 \, k(k-k')}{m_e^2 (k\omega' - k'\omega)^4} \left\{ k^3 \left[\varepsilon_\infty(k,\omega) - 1\right] - k'^3 \left[\varepsilon_\infty(k',\omega') - 1\right] - (k-k')^3 \left[\varepsilon_\infty(k-k', \omega-\omega') - 1\right] \right\}^2$$

Calcul de A_3 :

$$A_3 = I(k, k-k', k) + I(k, k-k', -k')$$

$$= -\frac{q^3}{m_e^3} \int \frac{dv}{\omega - kv} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{(\omega-\omega') - (k-k')v} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{1}{\omega - kv} - \frac{1}{\omega' - k'v} \right) \frac{dF_0}{dv} \right] \right\}$$

Intégrons deux fois par parties :

$$A_3 = -\frac{q^3 k}{m_e^3} \int dv \, \frac{1}{(\omega - kv)^2} \frac{1}{(\omega-\omega') - (k-k')v} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{1}{\omega - kv} - \frac{1}{\omega' - k'v} \right) \frac{dF_0}{dv} \right]$$

$$A_3 = \frac{q^3 k}{m_e^3} \int dv \left(\frac{1}{\omega - kv} - \frac{1}{\omega' - k'v} \right) \frac{dF_0}{dv} \left[\frac{k-k'}{(\omega - kv)^2 \left[(\omega-\omega') - (k-k')v\right]^2} + \frac{2k}{(\omega - kv)^3 \left[(\omega-\omega') - (k-k')v\right]} \right]$$

$$(II.B.14)\quad A_3 = -\frac{q^3 k}{m_e^3} \int \frac{dv}{(\omega - kv)^3 (\omega' - k'v)} \left[\frac{k-k'}{(\omega-\omega') - (k-k')v} + \frac{2k}{\omega - kv} \right] \frac{dF_0}{dv}$$

Pour continuer le calcul, essayons d'évaluer l'importance des deux termes de A_3, qui font intervenir $\varepsilon_\infty(k,\omega)$ et $\varepsilon_\infty(k-k', \omega-\omega')$.

Estimation du terme $\varepsilon_\infty(k,\omega)$

1. Si k est résonnant :

$$(II.B.15) \quad \varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1 = -\lambda m\mu(\kappa) = -\frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2}$$

2. Si k est non résonnant :

$$\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1 = \frac{q^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\kappa} \int \frac{dv}{\omega - \kappa v} \frac{dF_0}{dv}$$

$$\simeq -\frac{q^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\kappa^2} \int \frac{\frac{dF_0}{dv}}{v} dv$$

en toute première approximation.

D'après la forme de $F_0(v)$:

$$F_0(v) = n_0 N(r) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{2 v_{th}^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{dF_0}{dv} dv = -\frac{1}{\sqrt{2}\, v_{th}} n_0 N(r)$$

Dans le cas non résonnant, $\varepsilon_\infty(k,\omega)-1$ s'écrit donc :

$$\varepsilon_\infty(k,\omega) - 1 \simeq \frac{q^2 n_0 N(r)}{\sqrt{2}\, m_e \varepsilon_0 \kappa^2 v_{th}}$$

En introduisant la longueur de Debye, on trouve:

$$(II.B.16) \quad \varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1 \simeq \frac{N(r)}{\kappa^2 \lambda_D^2}$$

terme très supérieur à $\lambda_{m\mu}(k)$.

Les contributions non résonnantes sont beaucoup plus grandes que les contributions des termes résonnants. Dans la suite du calcul, seules les contributions non résonnantes peuvent être gardées, c'est-à-dire les termes en $\left[\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1\right]$

$$\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1 = \frac{q^2}{m_e \varepsilon_0 (\kappa-\kappa')} \int \frac{\frac{dF_0}{dv}}{(\omega-\omega')-(\kappa-\kappa')v} dv$$

Dans ces conditions A_3 s'écrit :

$$A_3 = -\frac{q^3 \kappa}{m_e^3} \int \frac{1}{(\omega-\kappa v)^3} \frac{\frac{dF_0}{dv}(\kappa-\kappa')}{(\omega'-\kappa' v)\left[(\omega-\omega')-(\kappa-\kappa')v\right]} dv$$

$$A_3 = -\frac{q^3 \kappa}{m_e^3} \left[\frac{\kappa(\kappa-\kappa')}{(\omega-\kappa v)^3(\omega'-\kappa' v)}\right]_{v=\frac{\omega-\omega'}{\kappa-\kappa'}} \int \frac{\frac{dF_0}{dv}}{(\omega-\omega')-(\kappa-\kappa')v} dv$$

$$A_3 = -\frac{q}{m_e^2} \frac{\varepsilon_0 \kappa (\kappa-\kappa')^2 \left[\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1\right]}{\left[\omega - \frac{\kappa(\omega-\omega')}{(\kappa-\kappa')}\right]^3 \left[\omega' - \frac{\kappa'(\omega-\omega')}{(\kappa-\kappa')}\right]}$$

(II.B.17)
$$\boxed{A_3 = -\frac{q \varepsilon_0 \kappa (\kappa-\kappa')^6 \left[\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1\right]}{m_e^2 (\kappa\omega'-\omega\kappa')^4}}$$

Ecrivons maintenant $E(k,k',k) + E(k,k',-k') = J_{k,k'}$

$$J_{\kappa,\kappa'} = -\frac{q \varepsilon_0 \kappa}{m_e^2 (\kappa\omega'-\kappa'\omega)^4} \left\{ G^{(3)}(\kappa,\kappa',\kappa,\kappa')(\kappa-\kappa')^6 \left[\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1\right] \right.$$

(II.B.18)

$$\left. + \frac{\left[G^{(2)}(\kappa,\kappa',\kappa-\kappa')\right]^2}{\varepsilon_L(m-m', \kappa-\kappa', \omega-\omega', \mu)} \left[\kappa^3\left[\varepsilon_\infty(\kappa,\omega) - 1\right] - (\kappa-\kappa')^3\left[\varepsilon_\infty\left(\frac{\kappa-\kappa'}{\omega-\omega'}\right) - 1\right] - \kappa'^3\left[\varepsilon_\infty(\kappa',\omega) - 1\right]\right.\right.$$

D'après les expressions (II.B.15) et (II.B.16), nous pouvons négliger les contributions des termes résonnants devant les contributions des termes non résonnants. De plus $\varepsilon_\infty(k-k',\omega-\omega')$ est >> 1.

Il reste dans ces conditions :

$$(II.B.19)\quad J_{\kappa,\kappa'} = -\frac{q\varepsilon_0\,\kappa(\kappa-\kappa')^6\,\varepsilon_\infty(\kappa-\kappa',\omega-\omega')}{m_e^2\,(\kappa\omega'-\kappa'\omega)^4}\left[G^{(3)}\begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa'\\ \kappa\\ \kappa'\end{pmatrix}-\left[G^{(2)}\begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa'\\ \kappa-\kappa'\end{pmatrix}\right]^2\right]$$

D'où l'expression (II.31)

$$\varepsilon_L(m,\kappa,\omega,\mu)\left\langle\varphi^{(3)}_{\kappa}\varphi^{(3)*}_{\kappa}(m,z,\omega,\mu)\right\rangle$$

$$= -\frac{q}{\varepsilon_0}\sum_{m',\mu'}\frac{d\omega'}{2\pi}\,\kappa'^2\left\langle\varphi^{(1)}_{\kappa'}\varphi^{(1)*}_{\kappa'}\right\rangle\left\langle\varphi^{(1)}_{\kappa}\varphi^{(1)*}_{\kappa}\right\rangle J_{\kappa,\kappa'}$$

CHAPITRE II

BILIOGRAPHIE.

/1/ G. MATTIEUSSENT, J. Plasma Physics vol 15, part 3 (1976)

/2/ A.A. GALEEV, VI KARPMAN et RZ. SAGDEEV, Soviet Physics, Doklady Vol. 9 n° 8 (1965)

/3/ T.H. JENSEN, Phys. Fluids 13, 1778 (1970)

/4/ M. GUILLEMOT, thèse, rapport EUR-CEA-FC 639 (1972)

/5/ DAVIDSON R.C. Methods in non linear plasma theory Academic Press (1972)

/6/ G. LAVAL et R. PELLAT, Plasma physics Les Houches (1972) GORDON and BREACH.

CHAPITRE III

ETUDE NUMERIQUE DE L'EVOLUTION DU SPECTRE

L'évolution spatiale du spectre de turbulence est obtenue en calculant numériquement l'amplitude de chaque composante du spectre et sa variation, soit en fonction de la distance, soit en fonction de la puissance. L'analyse numérique est faite dans le cas d'un spectre ayant un profil initial rectangulaire, à partir des expressions (33) et (34) du chapitre II, en se limitant aux modes fondamentaux m = o, μ = 1.

III.1 EXPOSE DU PROBLEME A TRAITER NUMERIQUEMENT

L'évolution spatiale du spectre de bruit est obtenue sous la forme de l'équation intégro différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\langle \varphi_\omega \varphi^*_\omega(z)\right\rangle = -2K_i^+ \left\langle \varphi_\omega \varphi^*_\omega(z)\right\rangle + \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} W(\omega,\omega') \left\langle \varphi_\omega \varphi^*_\omega(z)\right\rangle \left\langle \varphi_{\omega'} \varphi^*_{\omega'}(z)\right\rangle \qquad \text{(III.1)}$$

Le terme W (ω , ω') est calculé dans le cas d'une courbe de dispersion droite (II-37), et en supposant que la fonction de

distribution initiale des électrons est une maxwellienne limitée aux vitesses positives (expression II-38). Rappelons la forme de W (ω , ω') :

$$(III.2) \quad W(\omega,\omega') = \frac{2 n_o q^4 G K'^2}{\sqrt{2\pi}\, v_{th}^3 m_e^3 \varepsilon_o \Omega^4} \frac{|\omega-\omega'|}{(\omega-\omega')} \exp\left(-\frac{v_g^2}{2v_{th}^2}\right)$$

Nous voyons que la connaissance de plusieurs paramètres sont nécessaires à cette étude numérique.

- la connaissance du spectre en z = o
- la connaissance du facteur G.
- la connaissance de la relation de dispersion
- la connaissance de l'amortissement Landau linéaire pour chaque onde composant le spectre de turbulence.

III.2 SPECTRE INITIAL EN z = o

Le spectre choisi est un spectre représenté ci-dessous ; le carré de l'amplitude est porté en fonction de la fréquence sur la figure III.1.

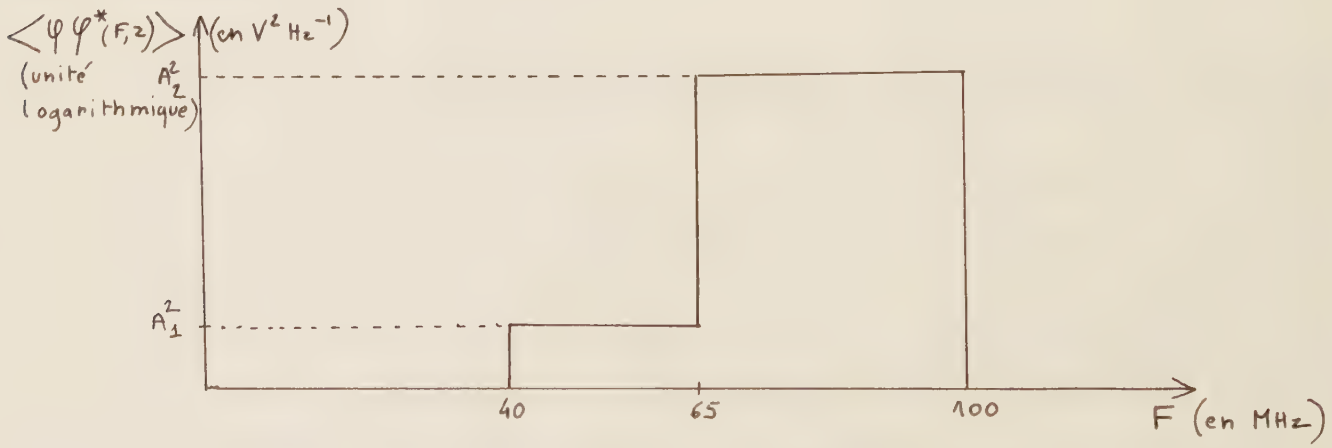


Fig.III-1 Spectre idéal initial

L'amplitude des composantes entre 40 et 65 MHz est constante, petite devant l'amplitude constante des composantes entre 65 et

100 MHz. Le spectre entre 40 et 65 MHz peut être assimilé au bruit de fond et permettra d'étudier la croissance des ondes de ce bruit de fond par effet Landau non linéaire dû aux ondes du spectre de turbulence entre 65 et 100 MHz. L'amplitude relative entre A_1^2 et A_2^2 sera variée par la suite. Nous verrons au chapitre VII comment les valeurs de A^2, c'est-à-dire de $\langle \varphi \varphi^*_{\omega(2)} \rangle$ sont déduites des valeurs de la puissance injectée.

III.3 CALCUL DU FACTEUR G.

Le facteur G caractérise la structure des modes choisis pour les potentiels.

$$G = G^{(3)}(\omega,\omega,\omega',\omega') - \left[G^{(2)}(\omega,\omega-\omega',\omega)\right]^2 \qquad \text{(III.3)}$$

avec :

$$G^{(2)}(\omega,\omega-\omega',\omega) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r N(r)\,dr\,\psi_K(r)\,\psi_{K-K'}(r)\,\psi_{K'}(r) \qquad \text{(III.4)}$$

Dans cette expression, on suppose que le profil de densité N(r) est égal à 1 entre r = o et r = R et nul pour r > R. Le profil de potentiel correspondant est pris égal à $\frac{J_o(2,4\,\frac{r}{R})}{J_1(2,4)}$, J_o et J_1 étant les fonctions de Bessel d'ordre o et 1 ; (relation II 35)

$J_1(2,4)$ représente le facteur de normalisation des fonctions orthogonales $\Psi_k(r)$.

$$J_1(2,4) = \sqrt{\frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\,dr\; J_o^2\left(2,4\,\frac{r}{R}\right)} \qquad \text{(III.5)}$$

$$G = \frac{2\int_o^1 r\,dr\; J_o^{(4)}(2,4r)}{J_1^4(2,4)} - \left[\frac{2\int_o^1 r\,dr\; J_o^{(3)}(2,4r)}{J_1^3(2,4)}\right]^2 \qquad \text{(III.6)}$$

$$\int_0^1 r\,dr\, J_0(2,4\,r) = 0,22$$

$$\int_0^1 r\,dr\, J_0^3(2,4\,r) = 0,098 \quad ; \quad \int_0^1 r\,dr\, J_0^4(2,4\,r) = 0,077$$

$J_1(2,4) = 0,52$

Compte tenu de ces valeurs, on trouve G de l'ordre de 2.

III.4 RELATION DE DISPERSION

Le calcul numérique est fait dans le cas d'une relation de dispersion obtenue expérimentalement et qui a l'allure représentée sur la figure III.2. On voit très nettement sur cette figure que la droite :

$\frac{\Omega}{\omega} + \frac{kvg}{\omega} = 1$ ou $\Omega = 169\ 10^6$ Hz et $vg = 1,78\ 10^6\ m.s^{-1}$ rend compte des valeurs expérimentales $\omega = f(k)$ pour toutes les fréquences du spectre de turbulence.

Nous verrons au chapitre VII que la connaissance de la relation de dispersion permet de déduire en outre les valeurs de la fréquence de plasma, de la densité, de la vitesse thermique et du rayon du plasma. Ces valeurs sont indiquées sur la figure III.2 et serviront dans le calcul numérique dont les résultats seront présentés plus loin.

III.5 DETERMINATION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT LANDAU LINEAIRE

L'amortissement Landau linéaire spatial K_i^L est calculé numériquement d'après la relation /17/ :

(III.7)
$$K_i^L = -\pi\,\omega_{pe}^2\ \frac{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{K^2}\,\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)_{v=\frac{\omega}{K}}}{\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial K}\left(\varepsilon_L\right)_{K=K_p}}$$

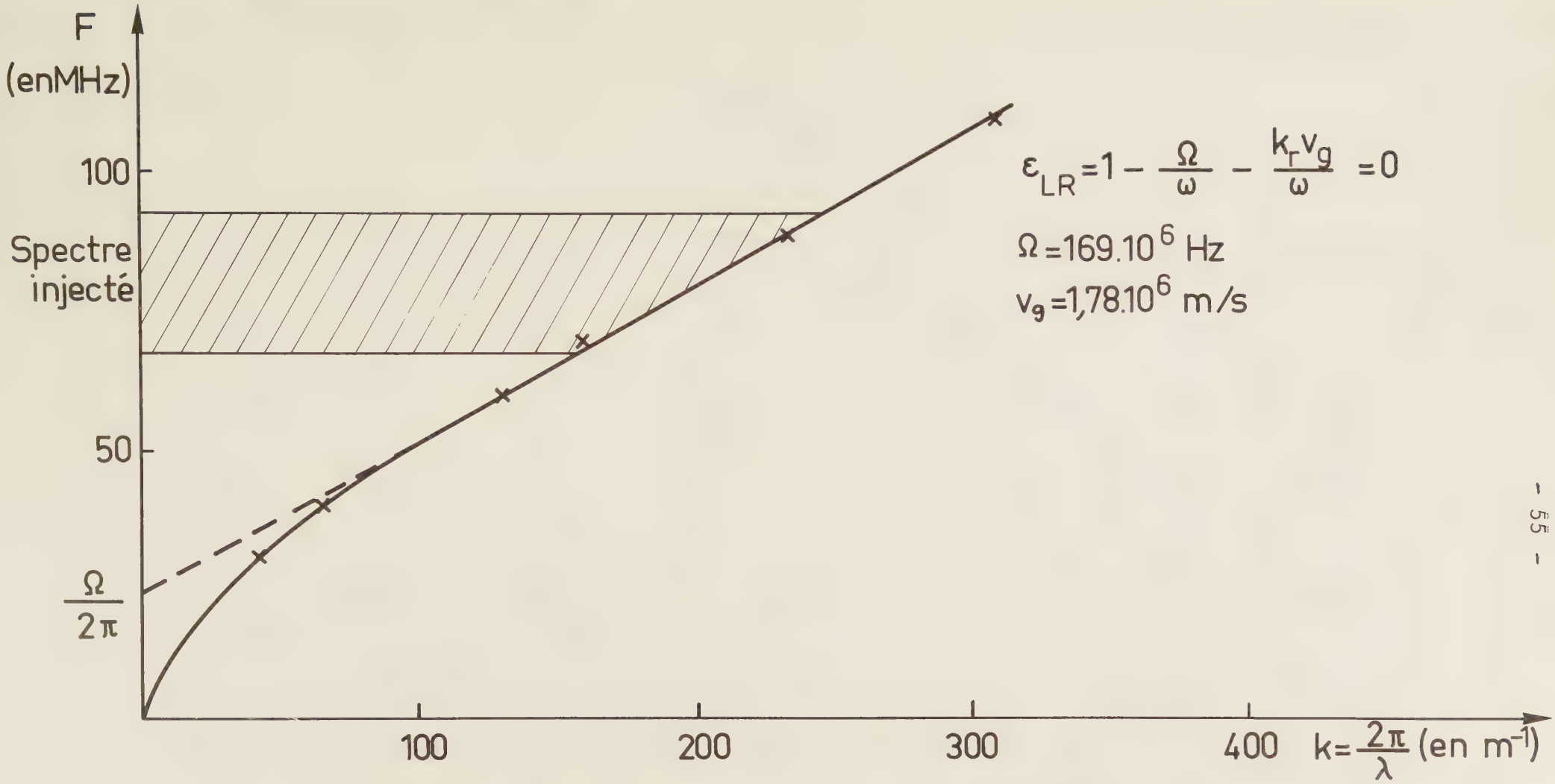


FIG III.2 COURBE DE DISPERSION F(k)

B_o =1300 GAUSS ; n_o=1,1.10^8 el/cm^3 ; v_{th} = 7,3.10^5 m/s

Pour un plasma maxwellien, et une relation de dispersion droite. III.7 peut s'écrire sous la forme :

(III.8) $$K_i^L(\omega) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{pe}^2\,\omega^2}{v_g\,v_{th}^3\,K_p^3}}\exp\left(-\frac{v_\varphi^2}{2v_{th}^2}\right)\cos\left[\frac{v_\varphi^2}{v_{th}^2}\frac{K_i}{K_p}\right]$$

III.6 RESULTATS

La figure III.3 montre l'évolution du spectre avec la puissance injectée à une certaine distance de la sonde émettrice, soit 19 cm. Les puissances correspondantes dans le plasma sont indiquées en nombre X de db au dessous de la puissance dans le plasma de 1,3 mW. Pour chaque valeur de la puissance, le spectre initial et son état correspondant à 19 cm sont représentés par le même symbole. Nous voyons sur cette figure que la partie haute fréquence du spectre est fortement amortie. L'amortissement croît avec la puissance pour cette partie du spectre ; pour une très faible valeur de l'énergie, P_{plasma}= 1,3 mW - 22 db, les composantes du spectre sont amorties par effet Landau linéaire, puisque pour cette valeur de la puissance, la variation du spectre suit sensiblement la courbe 2 $k_i^L(\omega)$. Toujours sur cette figure III.3, nous voyons la croissance de la partie la plus basse fréquence du spectre avec la puissance, ainsi que la croissance de ce que nous avons assimilé au bruit de fond.

Intéressons nous maintenant à l'évolution du spectre pour une puissance donnée dans le plasma P_p = 0,13 mW, et pour différentes distances d'observation. Deux cas sont envisagés : la figure III.4-a concerne l'évolution du spectre en tenant compte du

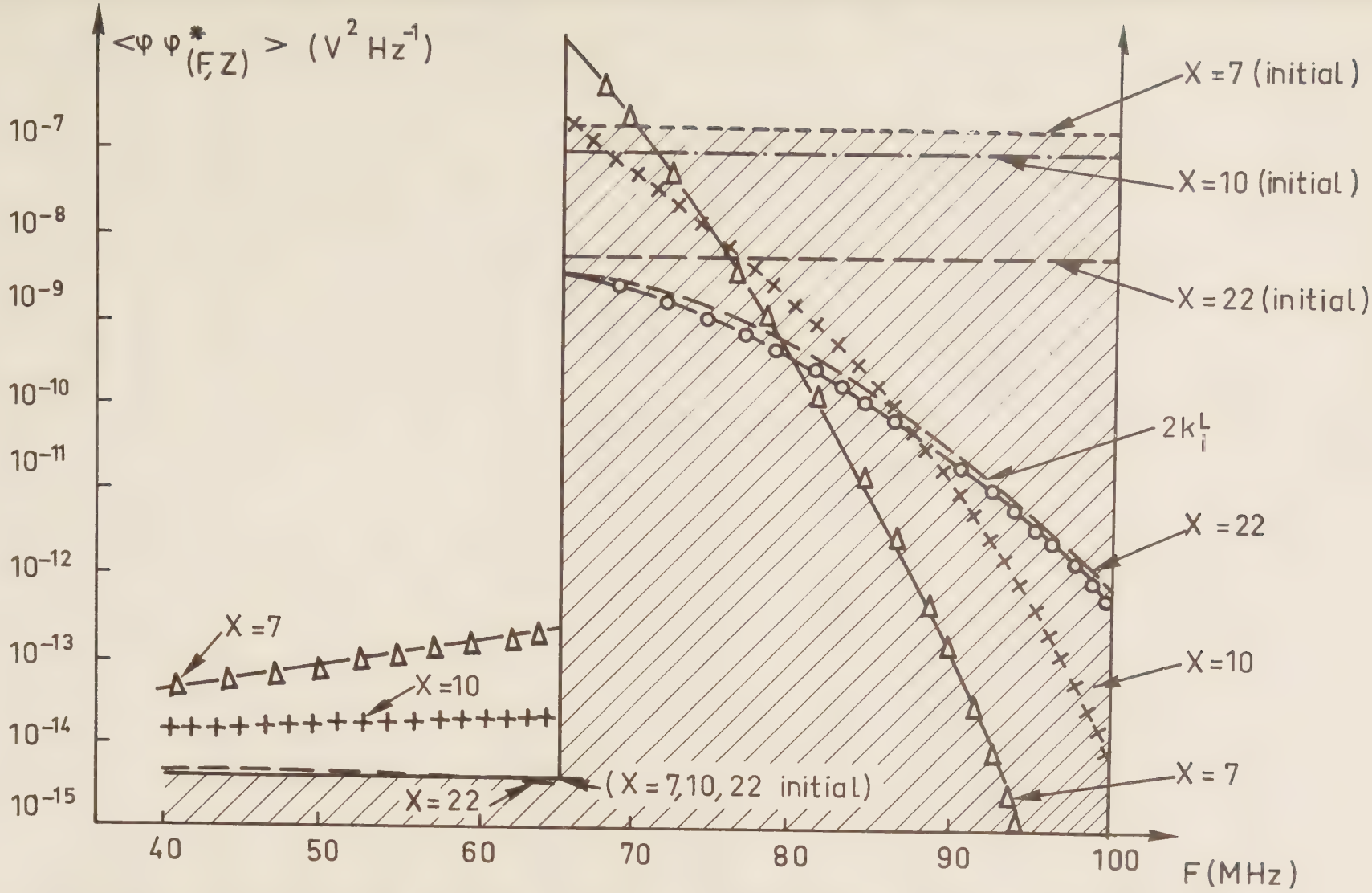


Fig. III 3 EVOLUTION D'UN SPECTRE RECTANGULAIRE AVEC LA PUISSANCE A UNE DISTANCE Z = 19 cm.

$\int_0^\infty < \varphi\,\varphi^*(F,Z) > dF = < \varphi\,\varphi^*(Z) >$ en volts

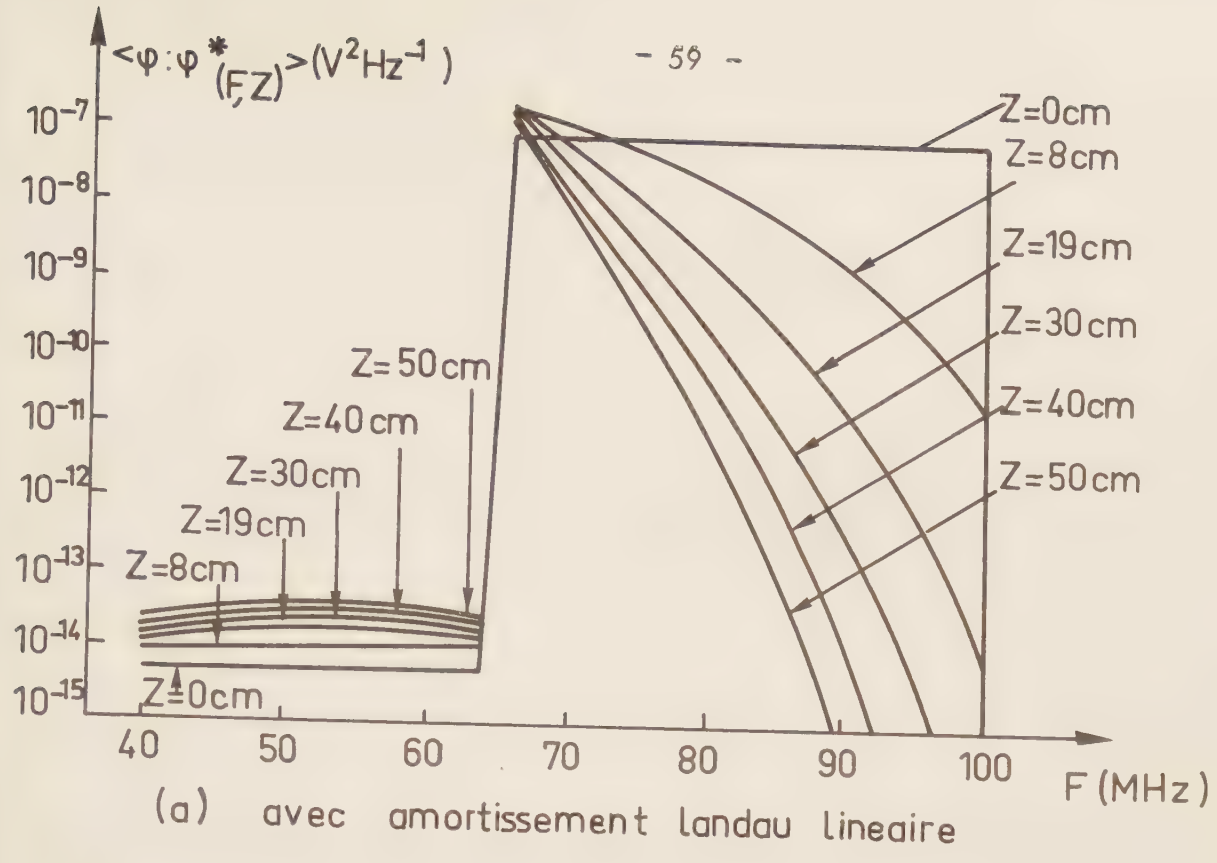
P spectre = 1,3 mW – Xdb ; $v_{th} = 7{,}3\ 10^5$ m/s ; $v_g = 1{,}78\ 10^6$ m/s

même amortissement Landau linéaire que dans le cas de la figure III.3, la figure III.4-b concerne l'évolution du spectre quand l'amortissement Landau linéaire est négligé.

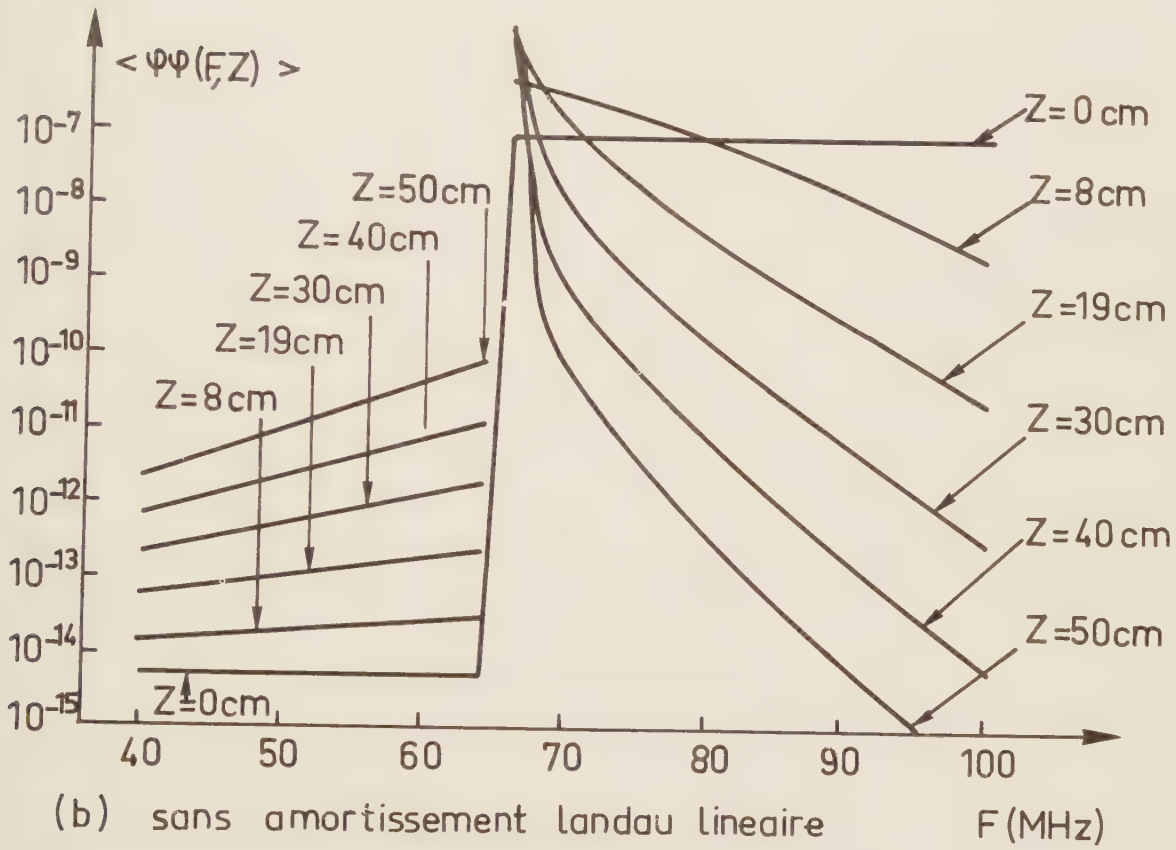
Il est clair que l'effet Landau linéaire a un effet modérateur sur le basculement du spectre vers les basses fréquences. Il est certain, à la vue de cette figure III.4, que le nombre de plasmons n'est conservé que dans le cas ou l'amortissement linéaire peut-être négligé.

III. CONCLUSION

Les premiers résultats numériques concernant un spectre rectangulaire confirment les résultats théoriques du chapitre II, à savoir une croissance de la partie basse du spectre et un amortissement de la partie plus haute fréquence du spectre de turbulence, quand la puissance, ou la distance, est augmentée.



(a) avec amortissement landau lineaire



(b) sans amortissement landau lineaire

Fig. III 4 EVOLUTION DU SPECTRE AVEC LA DISTANCE A UNE PUISSANCE DONNEE.

P spectre = 0,13 mW B_o = 1300 G

$v_{th} = 7,3.10^5$ m/s ; $v_g = 1,78.10^6$ m/s

CHAPITRE III

BIBLIOGRAPHIE.

/1/ Equipe EOS et M. CAREYRE, Note interne CEA n° 1074 (1970)
- A.P.S. Meeting Washington (1970)
Bull Am. Phys. Soc. 1511, 1450.

CHAPITRE IV

COUPLAGE RESONNANT A QUATRE ONDES

Nous étudions un mécanisme de couplage résonnant à quatre ondes qui peut exister conjointement au mécanisme Landau non linéaire, du fait de la quasi-linéarité de la courbe de dispersion des ondes se propageant dans la colonne de plasma, $\omega=\Omega+kvg$, sur un grand domaine de fréquences. En effet, quatre ondes de fréquences $\frac{\omega_1}{2\pi}$, $\frac{\omega_2}{2\pi}$, $\frac{\omega_3}{2\pi}$, $\frac{\omega_4}{2\pi}$, telles que :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \qquad \text{(IV.1)}$$

satisfont automatiquement la règle de sélection sur les nombres d'ondes :

$$K_1(\omega_1) + K_2(\omega_2) = K_3(\omega_3) + K_4(\omega_4) \qquad \text{(IV.2)}$$

si elles se situent dans le domaine de la relation de dispersion linéaire. Pour cette étude, nous utilisons les expressions classiques décrivant le couplage à trois ondes en modèle fluide ; nous appliquons d'abord les expressions pour coupler trois ondes naturelles ω_2, ω_3, ω_4 et créer des ondes forcées ω_{3+4}, ω_{3-2} et ω_{4-2}. Puis nous appliquons une deuxième fois les expressions de couplage entre ces ondes forcées et les ondes ω_{-2}, ω_4, ω_3 pour obtenir l'onde ω_1.

Nous montrons que ce processus peut jouer un rôle important dans l'évolution d'une onde de fréquence inférieure aux fréquences du spectre de turbulence proprement dit. Dans ce chapitre, les effets de géométrie finie radialement ne sont pas pris en compte.

IV.1 RAPPEL

Dans un plasma homogène, confiné longitudinalement par un fort champ magnétique considéré comme infini, sans collisions et où les ions sont immobiles, soient trois ondes plasma électronique qui se propagent. Quand on écrit la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un tel système, on montre que l'évolution des ondes est régie par un système de trois équations différentielles couplées de la forme [1, 2, 3] :

$$(IV.3) \qquad \boxed{k_j^2\, \varepsilon^{(1)}(\omega_j, k_j)\, \phi_j^{(2)} = M_{jj'j''}\, \phi_{j'}^{(1)}\, \phi_{j''}^{(1)}}$$

$\varepsilon^{(1)}(\omega j, kj)$ étant la constante diélectrique du mode j ; Mjj'j" la matrice d'intéraction associée aux modes j, j', j", et $\phi^{(2)}_{(1)}{}_{j\,j'\,j''}(z)$ étant les potentiels des trois ondes j, j', j" aux ordres 1 et 2.

$$(IV.4) \qquad M_{jj'j''} = \omega_{pe}^2 \frac{q}{me} \frac{k_j}{\omega_j} \frac{k_{j'}}{\omega_{j'}} \frac{k_{j''}}{\omega_{j''}} \left[\frac{k_j}{\omega_j} + \frac{k_{j'}}{\omega_{j'}} + \frac{k_{j''}}{\omega_{j''}} \right]$$

IV.2 CAS D'UN COUPLAGE RESONNANT A QUATRE ONDES

En relation avec les expériences qui seront décrites au chapitre VIII, intéressons-nous à des ondes du spectre de turbulence défini sur la figure IV.1.

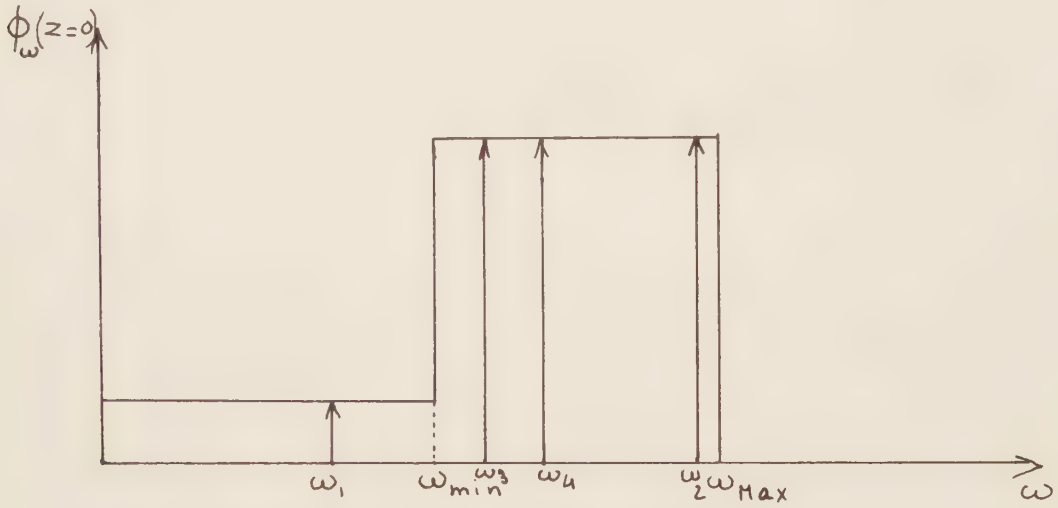


Fig. IV.1 Choix des ondes couplées

Les ondes 2, 3, 4 ont même amplitude initiale ϕ; les ondes sont telles que :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$$

avec :

$$\omega_{min} \leqslant \omega_3 \leqslant \omega_4 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_{Max}$$

L'amplitude de l'onde "test" ω_1 est très faible devant l'amplitude des ondes 2, 3, 4.

Les ondes naturelles ω_3 , ω_4, - ω_2 se couplent de manière non résonnante, créant trois oscillations forcées qui satisfont avec des notations évidentes aux relations :

IV.5) $$\phi^{(2)}_{3+4} = \frac{M_{3+4,3,4}\ \phi^{(1)}_3\ \phi^{(1)}_4}{K^2_{3+4}\ \varepsilon_{3+4}}$$

(IV.6) $$\phi^{(2)}_{3-2} = \frac{M_{3-2,3,-2}\ \phi^{(1)}_3\ \phi^{(1)*}_{-2}}{K^2_{3-2}\ \varepsilon_{3-2}}$$

(IV.7) $$\phi^{(2)}_{4-2} = \frac{M_{4-2,4,-2}\ \phi^{(1)}_4\ \phi^{(1)*}_{-2}}{K^2_{4-2}\ \varepsilon_{4-2}}$$

On admet que ces ondes forcées jouent le rôle d'ondes mères, qui se couplent avec l'une des ondes mères initiales pour donner une onde à la fréquence $\frac{\omega_1}{2\pi}$. On applique une seconde fois la matrice de couplage à trois ondes afin de déduire l'amplitude de l'onde ω_1. Seul, le terme en $\phi_3\ \phi_4\ \phi^*_{-2}$ est pris en compte puisque ϕ_1 est une amplitude très faible devant les trois autres. On obtient :

(IV.8) $$K_1^2\ \varepsilon_1\ \phi^{(3)}_1 = \left\{ \frac{M_{3+4,3,4}\ M_{1,3+4,-2}}{K^2_{3+4}\ \varepsilon_{3+4}} + \frac{M_{3-2,3,-2}\ M_{1,3-2,4}}{K^2_{3-2}\ \varepsilon_{3-2}} + \frac{M_{4-2,4,-2}\ M_{1,4-2,3}}{K^2_{4-2}\ \varepsilon_{4-2}} \right\} \phi^{(1)}_3\ \phi^{(1)}_4\ \phi^{*(1)}_{-2}$$

Mais, cette fois, ε_1 est une quantité résonnante et doit être développée autour de $\varepsilon_{1R}=0$.

(IV.9) $$\varepsilon_1(K_1, \omega_1) = \varepsilon_{1R}(K_1, \omega_1) + i\ \varepsilon_{1i}(K_1, \omega_1)$$

$$(IV.10)\quad \varepsilon_{1R}(K_1,\omega_1) = \underbrace{\varepsilon_{1R}(K_{1R},\omega_1)}_{=0} + iK_i \frac{\partial \varepsilon_{1R}(\omega_1,K_1)}{\partial K_1}$$

en posant comme habituellement :

$$k = k_r + ik_i$$

Par définition :

$$K_i^L = -\frac{\varepsilon_{1i}}{\frac{\partial}{\partial K_1}\varepsilon_{1R}} \qquad \text{et} \quad K_i = \frac{\partial}{\partial z}$$

Finalement :

$$\varepsilon_1 = i\left[\varepsilon_{1i}(K_1,\omega_1) + \frac{\partial \varepsilon_{1R}}{\partial K_1}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$= i\left[-K_i^L \frac{\partial \varepsilon_{1R}}{\partial K_1} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon_{1R}}{\partial K_1}\right]$$

L'expression IV 8 peut être réécrite :

$$(IV.11)\quad iK_1^2\left[-K_i^L + \frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{\partial \varepsilon_{1R}}{\partial K_1}\,\phi_1^{(3)} = \left\{\frac{M_{3+4,3,4}\,M_{1,3+4,-2}}{K_{3+4}^2\,\varepsilon_{3+4}}\right.$$

$$\left. + \frac{M_{3-2,3,-2}\,M_{1,3-2,4}}{K_{3-2}^2\,\varepsilon_{3-2}} + \frac{M_{4-2,4,-2}\,M_{1,4-2,3}}{K_{4-2}^2\,\varepsilon_{4-2}}\right\}\phi_3^{(1)}\phi_4^{(1)}\phi_{-2}^{*(1)}$$

IV.3 EQUATION DU COUPLAGE A QUATRE ONDES DANS LE CAS D'UNE RELATION DE DISPERSION DROITE

Examinons le cas d'ondes satisfaisant à la relation de dispersion droite :

$$\varepsilon_{1R} = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{k v_g}{\omega} = \varepsilon_{2R} = \varepsilon_{3R} = \varepsilon_{4R} = 0$$

Des relations telles que $\omega_1 = k_1 v_g + \Omega$, nous tirons :

$$\varepsilon_{3+4} = \frac{\Omega}{\omega_3 + \omega_4}$$

$$\varepsilon_{3-2} = \frac{\Omega}{\omega_3 - \omega_2}$$

$$\varepsilon_{4-2} = \frac{\Omega}{\omega_4 - \omega_2}$$

Posons: $\frac{k_j}{\omega_j} = \vartheta_j$

L'expression IV. 11 étant écrite sous la forme suivante :

$$(IV.12) \quad -k_1^2 \left[-k_\perp^2 + \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial k_1} \phi_1^{(3)} = M \phi_3^{(1)} \phi_4^{(1)} \phi_{-2}^{*(1)}$$

M étant égal à :

$$(IV.13) \quad M = -\left(\frac{\omega_{pe}^2 q}{m_e}\right)^2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4}{\Omega} \left\{ \frac{1}{\omega_3 + \omega_4} \left(\vartheta_{3+4} + \vartheta_3 + \vartheta_4 \right) \left(\vartheta_1 + \vartheta_{3+4} - \vartheta_2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \left(\vartheta_{3-2} + \vartheta_3 - \vartheta_2 \right) \left(\vartheta_1 + \vartheta_{3-2} + \vartheta_4 \right) + \frac{1}{\omega_4 - \omega_2} \left(\vartheta_{4-2} + \vartheta_4 - \vartheta_2 \right) \left(\vartheta_1 + \vartheta_{4-2} + \vartheta_3 \right) \right\}$$

Remarquons que $D_{3+4} \equiv D_{1+2}$; $D_{1-4} \equiv D_{3-2} \equiv D_{4-2} \equiv D_{1-3}$

La valeur commune de $D_{i-j} = \frac{1}{vg}$

$$(IV.14) \quad D_{i+j} = \frac{1}{v_g}\left[1 - \frac{2\Omega}{\omega_i + \omega_j}\right]$$

$$(IV.15) \quad D_j = \frac{1}{v_g}\left[1 - \frac{\Omega}{\omega_j}\right]$$

Nous pouvons ainsi calculer chacun des termes constituant M en fonction de vg, Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Intéressons-nous aux ondes du spectre de turbulence défini sur la figure IV.1. Nous voyons qu'avec une telle configuration, le terme en $\frac{1}{\omega_3 + \omega_4}$ dans M va donner une contribution moins forte que les termes en $\frac{1}{\omega_3 - \omega_2}$ et $\frac{1}{\omega_4 - \omega_2}$. De même, le terme en $\frac{1}{\omega_4 - \omega_2}$ l'emporte sur le terme en $\frac{1}{\omega_3 - \omega_2}$, les autres facteurs étant équivalents. Dans ces conditions, l'évolution du potentiel de l'onde 1, qui est alors une onde du bruit thermique, est donnée par :

$$(IV.16) \quad K_\lambda^2\left[-K_i^2 + \frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{v_g}{\omega}\phi_1^{(3)} = \left(\frac{\omega_{pe}^2 q}{me}\right)^2 \frac{D_1 D_2 D_3 D_4}{\Omega} \frac{1}{\omega_4 - \omega_2}\left(D_{4-2} + D_4 - D_2\right)$$
$$\times \left(D_1 + D_{4-2} + D_3\right)\phi_3^{(1)}\phi_4^{(1)}\phi_{-2}^{*(1)}$$

soit :

$$(IV.17)\quad K_1^2\left[-K_i^L + \frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{v_g}{\omega_1}\,\phi_1^{(3)} = \left(\frac{\omega_{pe}^2\, q}{me}\right)^2 \frac{K_1}{\omega_1}\frac{K_2}{\omega_2}\frac{K_3}{\omega_3}\frac{K_4}{\omega_4}\frac{1}{\Omega}\,A\,\phi_{-2}^{*(1)}\phi_3^{(1)}\phi_4^{(1)}$$

avec :

$$(IV.18)\quad A = \frac{1}{v_g^2\,(\omega_4-\omega_2)}\left[1 + \frac{\Omega(\omega_4-\omega_2)}{\omega_2\,\omega_4}\right]\left[3 - \frac{\Omega(\omega_3+\omega_1)}{\omega_1\,\omega_3}\right]$$

Examinons comment varie cette onde ω_1, de fréquence inférieure à celles du spectre de turbulence.

IV.4 EVOLUTION DE L'ONDE DE FREQUENCE F_1 AU DEBUT DE PROCESSUS

Pour résoudre l'équation IV.17, il faudrait appliquer l'hypothèse des phases aléatoires /4/ au carré du module de ϕ_1, ce qui ferait apparaître au second membre une somme de termes en $|\phi_3|^2\ |\phi_2|^2\ |\phi_4|^2$.

Nous n'avons pu résoudre efficacement cette équation, c'est pourquoi nous nous contentons d'essayer de trouver une solution valable au début de l'intéraction.

Nous négligeons maintenant le coefficient d'amortissement Landau k_i^L à cette fréquence F_1.

Et nous posons :

$$(IV.19)\quad \frac{\partial \phi_1^{(3)}}{\partial z} = \frac{\Delta \phi_1}{\Delta z}$$

Nous supposons qu'au début de l'intéraction, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_{-2}^*, n'ont

pas eu le temps de varier avec la distance et nous posons :

$$(IV.20)\quad \frac{\Delta\phi_1}{\Delta z} = \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)\ \phi_3(z=0)\ \phi_4(z=0)\ \phi_{-2}^{*}(z=0)$$

$$(IV.21)\quad \mathcal{M}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\end{bmatrix} = \frac{\omega_1}{k_1^2 v_g}\left(\frac{\omega_{pe}^2 q}{m_e}\right)^2 \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}\ \frac{1}{\Omega}\ A$$

Ce taux d'amortissement serait valable pour des fréquences $F_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ avec i = 2, 3, 4 constantes. Or toutes ces fréquences varient en restant à l'intérieur du spectre de turbulence, et chaque couple (3, 4) satisfaisant à la condition IV.1 donne une contribution supplémentaire. Si on admet une même probabilité pour chaque combinaison possible de couplage entre les différentes ondes, on peut calculer une variation $\frac{\Delta\phi_1}{\Delta z}$ de chaque onde ω_1 susceptible de satisfaire aux conditions:

$$\omega_1 < \omega_{min} \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2 \leq \omega_{Max}$$

Cela revient à calculer :

$$(IV.22)\quad \frac{\Delta\phi_1}{\Delta z}\frac{1}{(\phi_3\phi_4\phi_{-2}^{*})_{z=0}} = \mathcal{V}(\phi_1) = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{Max}} d\omega_2 \int_{\frac{\omega_2+\omega_{min}}{2}}^{\omega_2} d\omega_4 \int_{\omega_{min}}^{\omega_4} d\omega_3\ \mathcal{M}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\end{pmatrix}$$

On trouve après intégrations,

$$(IV.23)\quad \boxed{\mathcal{V}(\phi_1) = cste\,(\omega_{min}-\omega_1)\left\{\frac{(\omega_{Max}-\omega_{min})}{2(\omega_{min}-\omega_1)}\left[Log\left[\frac{\omega_{Max}-\omega_{min}}{2(\omega_{min}-\omega_1)}\right]-1\right]+1\right\}}$$

la constante dépendant des conditions de l'expérience.

Un calcul numérique a été fait, à partir de la formule IV.23, en tenant compte des valeurs extrêmes du spectre de turbulence expérimental.

$$\omega_{min} = 68 \text{ MHz} \times 2\pi$$
$$\omega_{max} = 93 \text{ MHz} \times 2\pi$$

Le résultat du calcul numérique est montré sur la figure IV.2, où $\mathcal{V}(\phi_1)$ est porté pour différentes valeurs de ω_1. Nous voyons que ce terme croît très vite dans la zone immédiatement inférieure au spectre de turbulence et nous pensons que l'évolution dans l'espace de l'onde de fréquence ϕ_1 se fait de façon semblable, bien que nous n'ayons pu mener à bien l'étude théorique.

IV.5 CONCLUSION

Le mécanisme de couplage à quatre ondes ne peut être ignoré pour les fréquences du bruit de fond immédiatement inférieures au spectre de turbulence injecté. Il peut expliquer les écarts qui seront constatés au chapitre VIII entre les courbes expérimentales et les courbes théoriques calculées par effet Landau non linéaire dans ce domaine de fréquences.

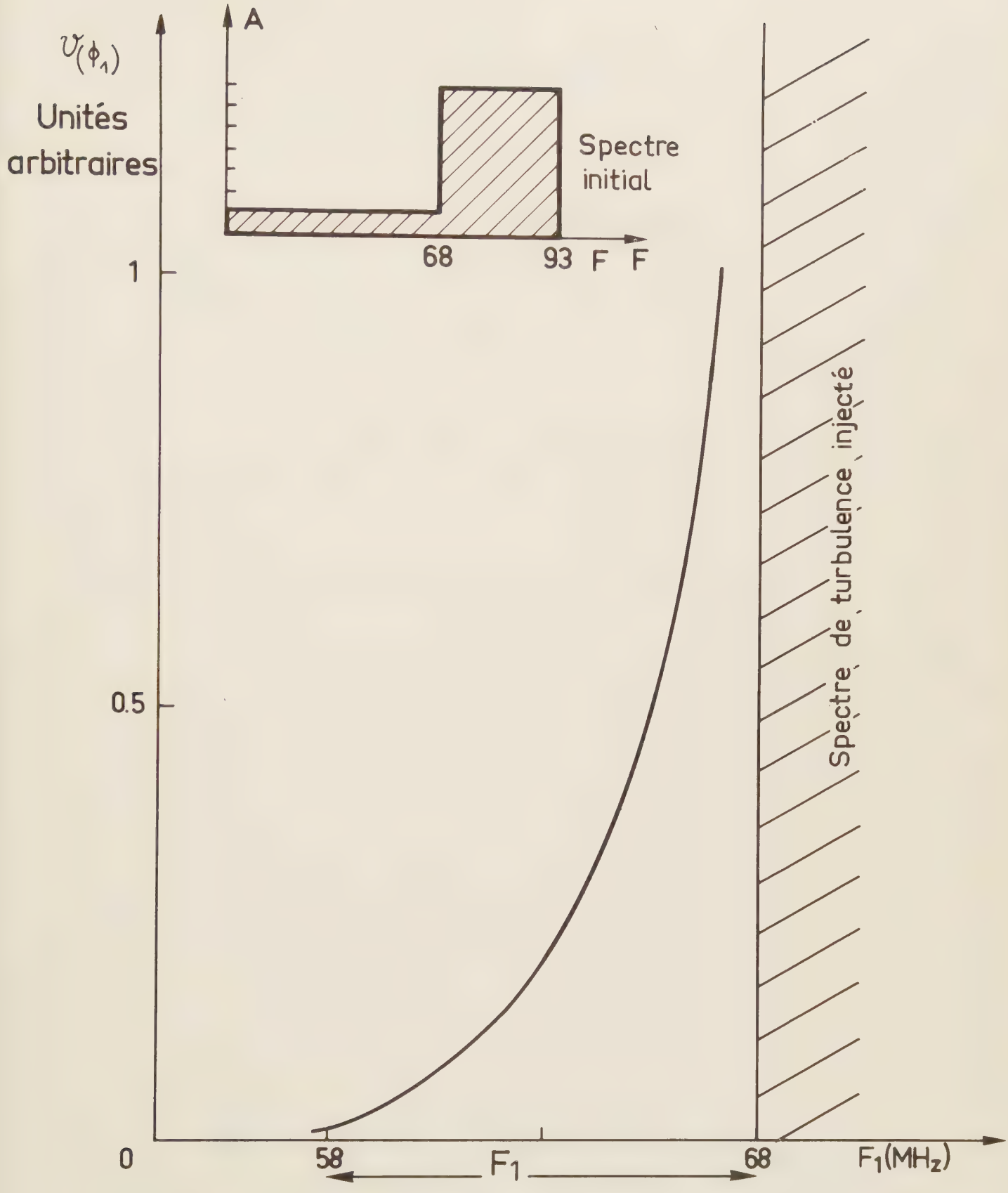


Fig IV 2 _ VARIATION $\mathcal{V}_{(\phi_1)}$ D UNE ONDE ω_1 PAR COUPLAGE A QUATRE ONDES

CHAPITRE IV

BIBLIOGRAPHIE

/1/ M. PERULLI, Rapport C.E.A. R-3639 (1968)

/2/ G. LAVAL and R. PELLAT, Plasma Physics Les Houches (1972) Gordon and Breach.

/3/ R.C. DAVIDSON, Methods in non linear Plasma Theory, Academic Press (1972).

/4/ V.N. TSYTOVITCH
Non linear effects in plasmas
Plenum press (1970).

CHAPITRE V

DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION ELECTRONIQUE MOYENNEE SUR LE TEMPS. THEORIE QUASI-LINEAIRE.

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre la déformation de la fonction de distribution électronique quand un spectre d'ondes est injecté dans le plasma. L'évolution de la fonction de distribution moyennée sur le temps $\langle f(r,z,v,t)\rangle = F_o(r,z,v)$ est seule considérée, ceci afin de comparer les résultats théoriques aux résultats expérimentaux obtenus à partir d'un analyseur d'énergie électrostatique multi-grille.

V.1 INTRODUCTION

Dans le domaine de turbulence faible, l'évolution de la fonction de distribution microscopique peut être obtenue à partir des résultats du chapitre II en poursuivant les calculs jusqu'au quatrième ordre. Une variation de la fonction de distribution peut être trouvée, sous la forme d'une équation intégrodifférentielle, qui ne pourrait être exploitée que nu-

mériquement. La déformation de la partie lentement variable de la fonction de distribution F_o (r,z,v) a donc été étudiée par une autre méthode ; avec les hypothèses du chapitre II, une relaxation quasi-linéaire de la fonction de distribution peut être considérée [1, 2, 3]. Nous verrons au chapitre VII que nous sommes dans les conditions d'application de la théorie quasi-linéaire, puisque les longueurs caractéristiques d'évolution du potentiel, du nombre d'onde, et de la fonction de distribution sont très supérieures à la longueur de cohérence du spectre.

L'équation cinétique donnant l'évolution temporelle de la fonction de distribution est rappelée dans l'annexe A. Nous n'avons gardé que les termes dominants, compte tenu des hypothèses précédemment décrites. Nous voyons que la fonction de distribution est définie à partir d'expressions intégro-différentielles qui nécessitent quelques simplifications pour être exploitées. Dans le cas spatial, trois termes, associés à trois propriétés physiques du système, interviennent pour déformer la fonction de distribution et sont analysés.

V.2 DIFFUSION RESONNANTE A LA VITESSE DE PHASE

Un premier terme peut être écrit qui représente l'intéraction résonnante avec les particules de vitesses voisines des vitesses de phase des ondes excitées dans le plasma. C'est la continuation du régime linéaire, très bien connu, où seules les particules résonnantes participent à l'intéraction. Ce terme s'écrit dans le cas spatial :

$$(V.1)\quad \frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial z} = \frac{q^2}{2m_e^2}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial v}\left\{ k_\omega^2 \left\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \right\rangle \frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial v} \right\}_{\omega = kv}$$

En remplaçant $\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^* (z) \rangle$ par son expression en fonction du flux de plasmons :

$$(V.2)\quad \left\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \right\rangle = \frac{2\,\mathcal{F}(\omega,z)}{\varepsilon_o k^2 \frac{\partial}{\partial \omega}(\varepsilon_L)\, v_g\, S}$$

et en prenant pour ε_L la relation de dispersion droite définie au chapitre II et donnée par l'expression (II.37), V.1 peut d'écrire :

$$(V.3)\quad \boxed{v \frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial z} = \frac{q^2}{m_e^2 \varepsilon_o}\,\frac{k}{v_g S}\,\frac{\partial}{\partial v}\left[v\, \mathcal{F}\left[\omega = kv, z\right] \frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial v} \right]}$$

Une expression analytique peut être trouvée si l'effet Landau linéaire est négligé. Dans ce cas $\mathcal{F}(\omega=kv,z)$ est donné par l'expression (II.55), et peut être écrit différemment pour la partie basse fréquence et la partie haute fréquence du spectre.

V.2.1 Partie basse fréquence du spectre.

Pour cette partie du spectre, c'est-à-dire pour les vitesses de phases les plus grandes, $\mathcal{F}(\omega,z)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{F}(\omega,z) = \mathcal{F}(\omega, z=0)\exp\left(\beta \bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)$$
$$= A_o \exp\left(\beta \bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)$$

l'expression (V.3) devient :

$$(V.4)\quad v\,\frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial z} = \frac{q^2}{m_e \varepsilon_o}\,\frac{K}{v_g S}\,A_o \exp\left(\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)\frac{\partial}{\partial v}\left[v\,\frac{\partial F_o^{R,ph}(z,v)}{\partial v}\right]_{\omega = Kv}$$

Utilisons le changement de variable :

$$(V.5)\quad d\xi = \frac{4q^2 K A_o}{m_e^2 \varepsilon_o S v_g}\exp\left(\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right) dz$$

dont l'intégration donne :

$$(V.6)\quad \xi = \frac{4q^2 K A_o\left[\exp\left(\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right) - 1\right]}{m_e^2 \varepsilon_o v_g S\left(\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T\right)}$$

Nous obtenons une nouvelle équation différentielle :

$$(V.7)\quad \frac{\partial F_o^{R,ph}(\xi,v)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\,v\,\frac{\partial}{\partial v}\left[v\,\frac{\partial F_o^{R,ph}(\xi,v)}{\partial v}\right]$$

Dans le cas de la distribution initiale maxwellienne de l'expression (II.38), nous pouvons montrer qu'une solution particulière de V7 est donnée par :

$$(V.8)\quad \boxed{F_o^{R,ph}(\xi,v) = \frac{\sqrt{2}\,n_o}{\sqrt{\pi}\,v_{th}\left[1 + \frac{\xi}{2v_{th}^2}\right]}\exp\left[-\frac{v^2}{2v_{th}^2\left(1 + \frac{\xi}{2v_{th}^2}\right)}\right]}$$

Nous voyons que la fonction de distribution reste maxwellienne, et que pour cette partie du spectre, une augmentation, ou bien de $\mathcal{F}(\omega=k,v,\ z=0)$, ou bien de z, correspond à une augmentation de la température électronique.

V.2.2 Partie haute fréquence du spectre.

Pour cette partie du spectre correspondant aux plus faibles vitesses de phase, $\mathcal{F}(\omega,z)$ s'écrit :

$$\mathcal{F}(\omega,z) = \mathcal{F}(\omega,z=0)\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)$$
$$= A_0'\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z)$$

Le changement de variable utilisé dans ce cas est tel que :

$$(V.9)\quad \xi' = \frac{4\,q^2 K A_0'}{m_e^2 \varepsilon_0 v_g S\,\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T}\left[\exp(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z) - 1\right]$$

L'équation différentielle aux dérivées partielles a la même forme que (V.7).

$$F_0^{R,ph}(\xi',v) = \frac{\sqrt{2}\,n_0}{\sqrt{\pi}\,v_{th}\left[1+\frac{\xi'}{2v_{th}^2}\right]}\exp\left[-\frac{v^2}{2v_{th}^2\left(1+\frac{\xi'}{2v_{th}^2}\right)}\right]$$

Du fait de la forme de ξ', quand la puissance augmente, ou quand la distance entre émetteur et analyseur de réception croît, la température électronique décroît pour cette partie du spectre d'ondes.

Pour la partie de la fonction de distribution correspondant aux vitesses de phase des ondes excitées, la modification de la fonction de distribution avec la puissance, ou avec la distance, a l'allure suivante :

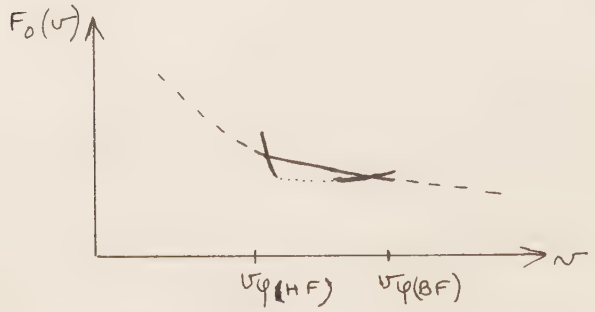


Fig. V.1

Le résultat global est une tendance à la formation d'un plateau.

Remarquons tout de suite que dans le cas expérimental étudié, très peu de particules sont concernées, car les vitesses de phase sont très supérieures à la vitesse thermique. La déformation de la fonction de distribution électronique aux vitesses de phase du spectre ne sera donc pratiquement pas observée.

V.3 DIFFUSION RESONNANTE A LA VITESSE DE GROUPE

Un second terme $F_o^{R,g}$ rend compte de la diffusion résonnante dans l'espace des vitesses pour des particules dont la vitesse est voisine de la vitesse de groupe des ondes. Ce terme est très intéressant puisqu'il est plus spécialement associé à l'effet Landau non linéaire.

Son expression est la suivante :

$$(V.10)\quad v\frac{\partial F_o^{R,g}(z,v)}{\partial z}=\frac{4\pi\omega_{pe}^4}{n_o^2 m_e^2 v_g}\int_o^\infty d\omega\, k\left[\frac{1}{2}\varepsilon_o k_\omega^2\left\langle\varphi_\omega\varphi_\omega^*(z)\right\rangle\right]$$

$$\times\int_o^\infty d\omega'\left[\frac{1}{2}\varepsilon_o k_{\omega'}^{'2}\left\langle\varphi_{\omega'}\varphi_{\omega'}^*(z)\right\rangle\right]\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{A_{k,k'}^2}{\left|\varepsilon_L(k-k')\right|^2}\frac{\partial F_o^{R,g}(z,v)}{\partial v}\,\delta\left[\frac{\omega-\omega'}{k-k'}-v\right]\right\}$$

Dans cette expression $\varepsilon_L(k-k')$ et $A(k,k')$ sont respectivement donnés par :

$$(V.11)\quad \varepsilon_L(k-k')=\frac{q^2}{m_e\,\varepsilon_o(k-k')}\int\frac{dv\,\frac{dF_o(v)}{dv}}{(\omega-\omega')-(k-k')v}$$

et

$$(V.12)\quad A_{k,k'}=\frac{1}{(\omega-kv_o)^2}+\frac{\omega_{pe}^2}{(k-k')^2}\int dv\left\{\frac{\frac{\partial^2 F_o^{R,v_o}}{\partial v^2}}{(\omega-kv)(\omega'-k'v)}\right.$$

$$\left.+pp\,\frac{\frac{\partial F_o^{R,v_o}}{\partial v}}{(\omega-\omega')-(k-k')v}\left[\frac{k'}{(\omega'-k'v)^2}-\frac{k}{(\omega-kv)^2}+\frac{k-k'}{(\omega-kv_o)^2}\right]\right\}$$

où $\quad v_o=\dfrac{\omega-\omega'}{k-k'}$

Compte-tenu de simplifications dictées par les conditions expérimentales et développées dans l'annexe B, nous déduisons :

$$\frac{A_{k,k'}^2}{\left|\varepsilon_L(k-k')\right|^2}=\frac{1}{\Omega^4}$$

Nous pouvons faire apparaître dans l'expression (V.10) la densité spectrale d'énergie ξ_f donnée par l'expression (II.41). Prenant alors pour k une valeur moyenne $\bar{k}$ sur l'intervalle de définition, nous déduisons :

$$(V.13)\quad \frac{\partial F_o^{R,g}(v,z)}{\partial z} = \frac{4\pi\omega_{pe}^4\ \bar{k}}{n_o^2 m_e^2 v_g^2 \Omega^4}\left[\xi_f(z)\right]^2 \frac{\partial^2 F_o^{R,g}(v,z)}{\partial v^2}\Bigg\}_{v=v_g}$$

Nous pouvons d'abord examiner le cas du début du processus.

V.3.1 Au début de l'interaction, nous pouvons considérer que dans le membre de droite de l'équation (V.13), la fonction $F_o^{R,g}(v,z)$ peut être assimilée à la fonction maxwellienne initiale (II.38) :

$$(V.14)\quad \frac{\partial F_o^{R,g}}{\partial z}(z,v) = \frac{4\pi\omega_{pe}^4\ \bar{k}}{n_o m_e^2 v_g^2 \Omega^4}\frac{1}{\sqrt{\pi}v_{th}^3}\left[\xi_f(z)\right]^2\left(\frac{v^2}{v_{th}^2} - 1\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

La variation de $\frac{\partial F_o^{R,g}}{\partial z}(v,z)$ avec la vitesse au voisinage de v = vg est représentée sur la fig. V.2 ; dans la plupart des cas expérimentaux, la vitesse de groupe varie entre 1,5 et 2,5 fois la vitesse thermique.

Nous voyons sur la figure V.2 que pour v >vth $\frac{\partial F_o^{R,g}}{\partial z}(z,v)$ est positive. Il en résulte un accroissement de la fonction de distribution, et donc du nombre de particules quand la distance augmente.

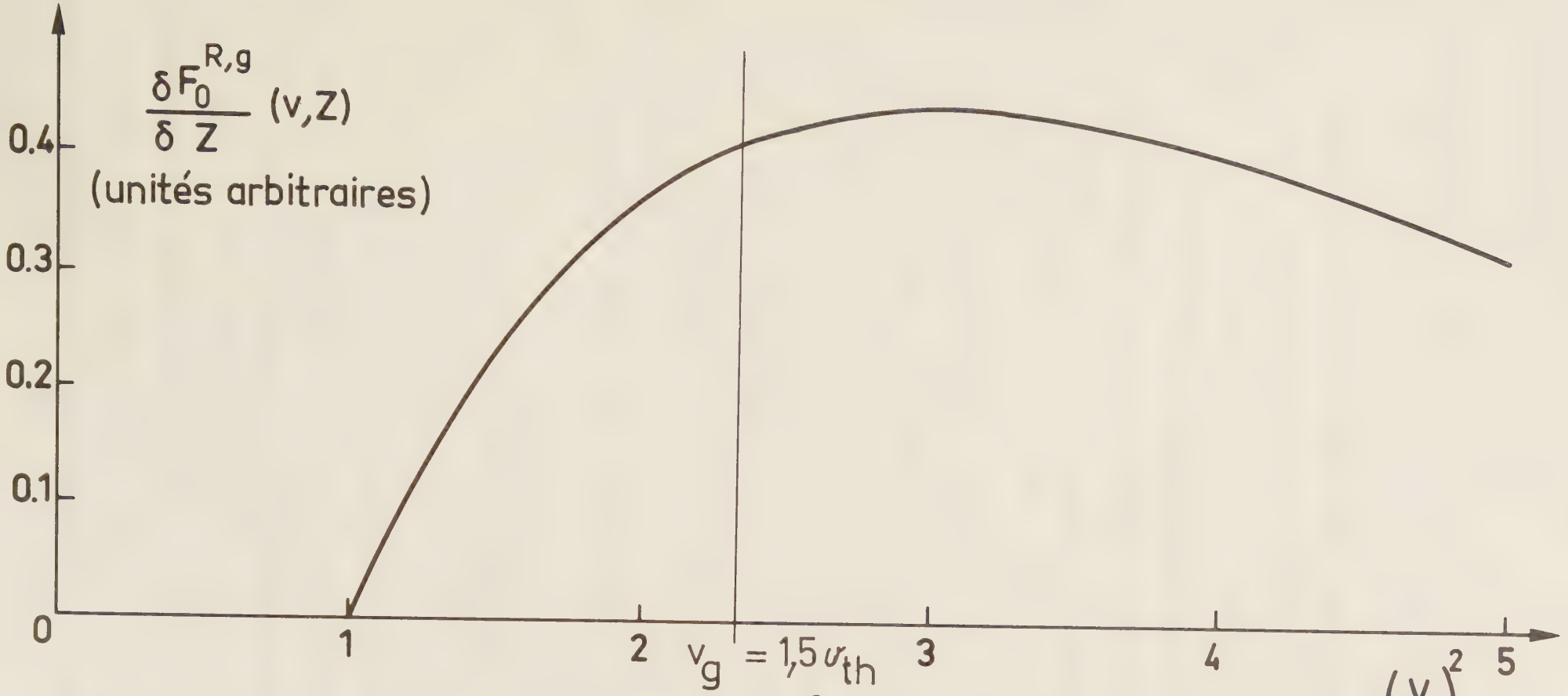


FIG. V 2 VARIATION DE LA FONCTION $\left(\frac{v^2}{v_{th}^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$

PROPORTIONNELLE A $\frac{\delta F_0^{R,g}}{\delta Z}$ (Z, v)

Initialement, la déformation de la fonction de distribution est localisée au voisinage de la vitesse de groupe des ondes du spectre. Cette déformation croît linéairement avec la distance et croît comme le carré de la puissance injectée.

V.3.2 Solution analytique de l'équation de diffusion.

Pour savoir ce qui se passe au bout d'une certaine distance, il est nécessaire d'essayer de trouver une solution analytique à l'équation (V.13).

Pour cela, nous supposons que le carré de la densité spectrale d'énergie $\sum_{\omega} |\xi_f(\omega)|^2$ se conserve le long de la colonne de plasma. Nous pouvons donc écrire (V.13) sous la forme :

$$\frac{\partial F_o^{R,g}(z,v)}{\partial z} = \bar{a}^2 \frac{\partial^2 F_o^{R,g}(z,v)}{\partial v^2} \qquad \text{(V.15)}$$

$\bar{a}^2$ étant une quantité indépendante de z, et de v telle que :

$$\bar{a}^2 = \frac{4\pi \omega_{pe}^4 \overline{\kappa} \left[\xi_f\right]^2}{n_o^2 m_e^2 v_g^2 \Omega^4} \qquad \text{(V.16)}$$

L'équation aux dérivées partielles dite "de diffusion" (V.15) admet plusieurs solutions analytiques qui dépendent des conditions initiales. Dans le cas où la vitesse de groupe est rigoureusement constante, la solution est une fonction $\delta [v - vg]$, la déformation existant seulement en v = vg. Dans le cas où la vitesse de groupe s'étend entre vg_1 et vg_2, sur un petit domaine Δvg, la solution de l'équation V.15 montre qu'il y a formation d'un plateau

sur la fonction de distribution autour des vitesses de groupe.

Nous montrerons au chapitre IX qu'il peut exister des causes expérimentales de variation importante de la vitesse de groupe. C'est pourquoi nous allons tenter de chercher une solution simple de l'équation (V.15), en raccordant la solution à la fonction de distribution initiale, c'est-à-dire en faisant varier abusivement la vitesse de groupe de 0 à l'infini. Evidemment, nous en déduirons une solution utilisable uniquement autour de la vitesse de groupe.

La solution générale de (V.15) est obtenue en remarquant que cette équation reste invariable si on fait les transformations scalaires suivantes :
$v \to sv$ et $z \to s^2 z$, s étant arbitraire. La solution est invariante dans la transformation $F_o^{R,g}(v,z) = F_o^{R,g}(sv, s^2 z)$.
Si nous posons $s = \frac{1}{\sqrt{z}}$, nous trouvons, en posant

$y = \frac{v}{\sqrt{z}}$, que

la fonction $F_o^{R,g}(z,v)$ devient $F_o^{R,g}(y)$, fonction de la seule variable y et l'équation (V.15) devient alors une équation différentielle simple :

$$(V.17) \qquad \frac{d^2 F_o^{R,g}(y)}{dy^2} + \frac{y}{2\bar{a}^2} \frac{d F_o^{R,g}(y)}{dy} = 0$$

c'est-à-dire une déformation :

$$(V.18) \quad \delta \left[F_o^{R,g}\left(\frac{v}{\sqrt{z}}\right) \right] = \text{cste} \frac{v}{\sqrt{z}} \exp\left(-\frac{v^2}{z}\right)$$

Une solution particulière de (V.15), qui préserve le caractère maxwellien de la fonction de distribution initiale, est trouvée.

Elle consiste à chercher une solution de la forme :

$$(V.19)\quad F(v,3)_{v_g+\Delta v_g} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} C \int_{\Delta v_g} \frac{dv'}{\sqrt{z}} \exp -\left[\frac{(v-v')^2}{4C'^2 z}\right] \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)$$

C et C' dépendant des conditions initiales [$\bar{a}$ et

$$F(v, z=0) = \frac{\sqrt{2}n_0}{\sqrt{\pi}v_{th}} \exp -\frac{v^2}{2v_{th}^2} = A_F \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)]$$

Le calcul de $\frac{\partial F}{\partial z}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ permet d'écrire que la solution (V.19) est solution de (V.15) si $C' \equiv \bar{a}$.

$$(V.20)\quad F(v,z) = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta v_g} \frac{dv'}{\sqrt{z}} \exp\left[-\frac{(v-v')^2}{4\bar{a}^2 z}\right] \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)$$

quand $z \to 0$,

$$(V.21)\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left[-\frac{(v-v')^2}{4\bar{a}^2 z}\right] \longrightarrow 2\sqrt{z}\,\bar{a}\,\delta[v-v']$$

d'où :

$$(V.22)\quad F(v,z=0) = A_F \exp -\frac{v^2}{2v_{th}^2} = 4\sqrt{2}\,\bar{a}\,C\int_0^\infty dv'\,\delta(v-v')\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\,\bar{a}\,C\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

l'expression (V.22) permet d'écrire :

$$C = \frac{A_F}{2\sqrt{2}\,\bar{a}} = \frac{n_o}{2\sqrt{\pi}\,v_{th}\,\bar{a}}$$

Nous obtenons :

$$(V.23)\quad F(v,z) = \frac{A_F}{\sqrt{2\pi}\,\bar{a}}\int_{\Delta v_g} \frac{dv'}{\sqrt{z}}\exp\left[-\frac{(v-v')^2}{4\bar{a}^2 z}\right]\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)$$

Pour intégrer cette équation, nous regroupons les exponentielles :

$$\exp\left[-\frac{(v-v')^2}{4\bar{a}^2 z} - \frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right] = \exp\left[-\frac{(2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z)}{8\bar{a}^2 v_{th}^2 z}v'^2 - \frac{v^2}{4\bar{a}^2 z} + \frac{2vv'}{4\bar{a}^2 z}\right]$$

Pour mettre l'exposant de l'exponentielle sous la forme d'un carré parfait, on fait quelques lignes de calcul et on trouve :

$$\exp\left[-\frac{(v-v')^2}{4\bar{a}^2 z}\right]\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) = \exp\left\{-\left[\frac{\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}{2\sqrt{2}\,v_{th}\,\bar{a}\sqrt{z}}v' - \frac{\sqrt{2}\,v_{th}\,v}{\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}\frac{1}{2\bar{a}\sqrt{z}}\right]^2\right\}$$

$$\times\exp\left\{\left[-\frac{v^2}{4\bar{a}^2 z}\right]\left[1-\frac{2v_{th}^2}{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}\right]\right\}$$

$$(V.24)\quad F(v,z)=\frac{A_F\,C''}{\sqrt{2\pi}\,\bar{a}\,\sqrt{z}}\left[\int_{\Delta v_g} dw\,\exp(-w^2)\right]\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}\right)\right]$$

en posant :

$$C''=\frac{2v_{th}\,\bar{a}\,\sqrt{2z}}{\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}$$

$$w=\frac{\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}{2\sqrt{2}\,v_{th}\,\bar{a}\,\sqrt{z}}\,v'-\frac{\sqrt{2}\,v_{th}}{2\bar{a}\sqrt{z}\,\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}\,v$$

et :

$$dw=\frac{\sqrt{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}}{2\sqrt{2}\,\bar{a}\,v_{th}\sqrt{z}}\,dv'$$

Compte tenu du résultat : $\int_0^\infty dw\,\exp(-w^2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$(V.25)\quad F(v,z)=\frac{A_F\,v_{th}}{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2+4\bar{a}^2 z}\right)$$

en remplaçant A_F par sa valeur, nous obtenons le terme de fonction de distribution $F_o^{R,g}(z,v)$, valable uniquement autour de la vitesse de groupe :

$$(V.26)\quad \boxed{F_o^{R,g}(v\simeq v_g,z)=\frac{n_o\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,v_{th}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\bar{a}^2 z}{v_{th}^2}}}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2\left[1+\frac{2\bar{a}^2 z}{v_{th}^2}\right]}\right)}$$

Cette solution rend compte du caractère maxwellien de la fonction de distribution. Elle montre que la température électronique, qui peut être écrite sous la forme :

$$T_e(z) = T_{eo}\left(1 + \frac{2\bar{a}^2 z}{v_{th}^2}\right) \qquad (V.27)$$

où T_{eo} est la température initiale.

croît avec la distance et avec la puissance du spectre.

Nous voyons sur la formule (V.26) que la fonction de distribution se déforme avec z et que, pour tout le domaine de variation de la vitesse de groupe, qui est loin d'être négligeable expérimentalement, on peut raccorder la solution à une maxwelienne. Ce terme de diffusion résonnante autour de la vitesse de groupe des ondes est le terme dominant expliquant la grande déformation de la fonction de distribution, ainsi que nous le verrons au chapitre IX.

Les mêmes résultats concernant la diffusion résonnante à la vitesse de groupe auraient pu être trouvés à partir de l'expression (V.1) en utilisant cette fois le champ de battement.

V.4 VARIATION DE LA PARTIE ADIABATIQUE DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION

Un troisième terme de l'expression (V.A) décrit la diffusion non résonnante dans l'espace des vitesses pour les particules de vitesse $v \neq v\varphi = \frac{\omega}{k_\omega}$ et $v \neq vg$

Ce terme s'écrit :

$$(V.28)\quad \frac{\partial F_o^{ad}(z,v)}{\partial z} = \frac{q^2}{2m_e^2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} K_\omega^2 \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v}{(\omega - Kv)^2}\frac{\partial}{\partial z}\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z)\rangle \frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial v}\right]$$

Compte tenu de la forme initiale de la fonction de distribution nous pouvons écrire que pour la plupart des particules :

$$v \sim v_{th} \ll \frac{\omega}{K_\omega}$$

Le facteur kv peut donc être négligé devant le facteur ω dans l'expression (V.28). Ceci nous permet d'écrire :

$$(V.29)\quad \boxed{\frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial z} = \frac{q^2}{4\pi m_e^2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left[v\frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial v}\right]\int_0^\infty d\omega \frac{K_\omega^2}{\omega^2}\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z)\rangle\right.}$$

Après avoir aisément analysé le début du processus, nous utiliserons deux méthodes permettant de donner une solution analytique à cette équation.

V.4.1 Début de l'intéraction.

Au début du processus, la variation de $F_o^{ad}(v,z)$ peut être négligée et $F_o^{ad}(v,z)$ est remplacé par $F_o^{ad}(v,z=0)$ dans le membre de droite de l'expression (V.29). Notons que cette approximation n'est valable que pour un spectre de faible amplitude.

Dans ces conditions, l'intégration en z est facile et permet d'écrire, pour une distribution maxwellienne initialement :

$$(V.30)\quad F_o^{ad}(v,z) - F_o^{ad}(v,z=0) = \frac{q^2}{4\pi m_e^2}\frac{n_o}{\sqrt{\pi}\,v_{th}^3}\left(\frac{v^2}{v_{th}^2} - 2\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)\left[I(z) - I(z=0)\right]$$

en posant :

$$(V.31) \qquad I(z) = \int_0^\infty d\omega \; \frac{K\omega^2}{\omega^2} \left\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \right\rangle$$

Constatons que la déformation de la partie adiabatique de la fonction de distribution aurait une dépendance en v, semblable à celle de la partie résonnante à la vitesse groupe (fig. V.3), sans la présence du facteur (I (z) - I (z = 0)). Cette différence est souvent négative expérimentalement, surtout si l'amortissement Landau linéaire est pris en compte. Pour $v > \sqrt{2}$ vth, la déformation de F_o^{ad} (v,z) est alors telle qu'elle correspond à une diminution du nombre de particules. Il en résulte donc un refroidissement du plasma correspondant, mais cet effet reste très faible au début du processus.

V.4.2 Obtention d'une solution analytique

Dans l'expression (V.29), nous pouvons écrire $\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z) \rangle$ en termes de flux, compte tenu de l'expression (V.2). Nous obtenons :

$$(V.32) \quad \frac{\partial F_o^{ad}}{\partial z}(v,z) = \frac{q^2}{2\pi m_e^2 \varepsilon_o S v_g} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathcal{F}(\omega,z) \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left[v \frac{\partial F_o^{ad}}{\partial v}(v,z) \right] \right\}$$

Cette équation a une forme identique à celle de l'équation (V.3) et nous allons faire le même genre de changement de variable :

$$(V.33) \quad d\zeta'' = \frac{2q^2}{\pi m_e^2 \varepsilon_o v_g S} \left\{ \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(\omega,z) \right\} dz$$

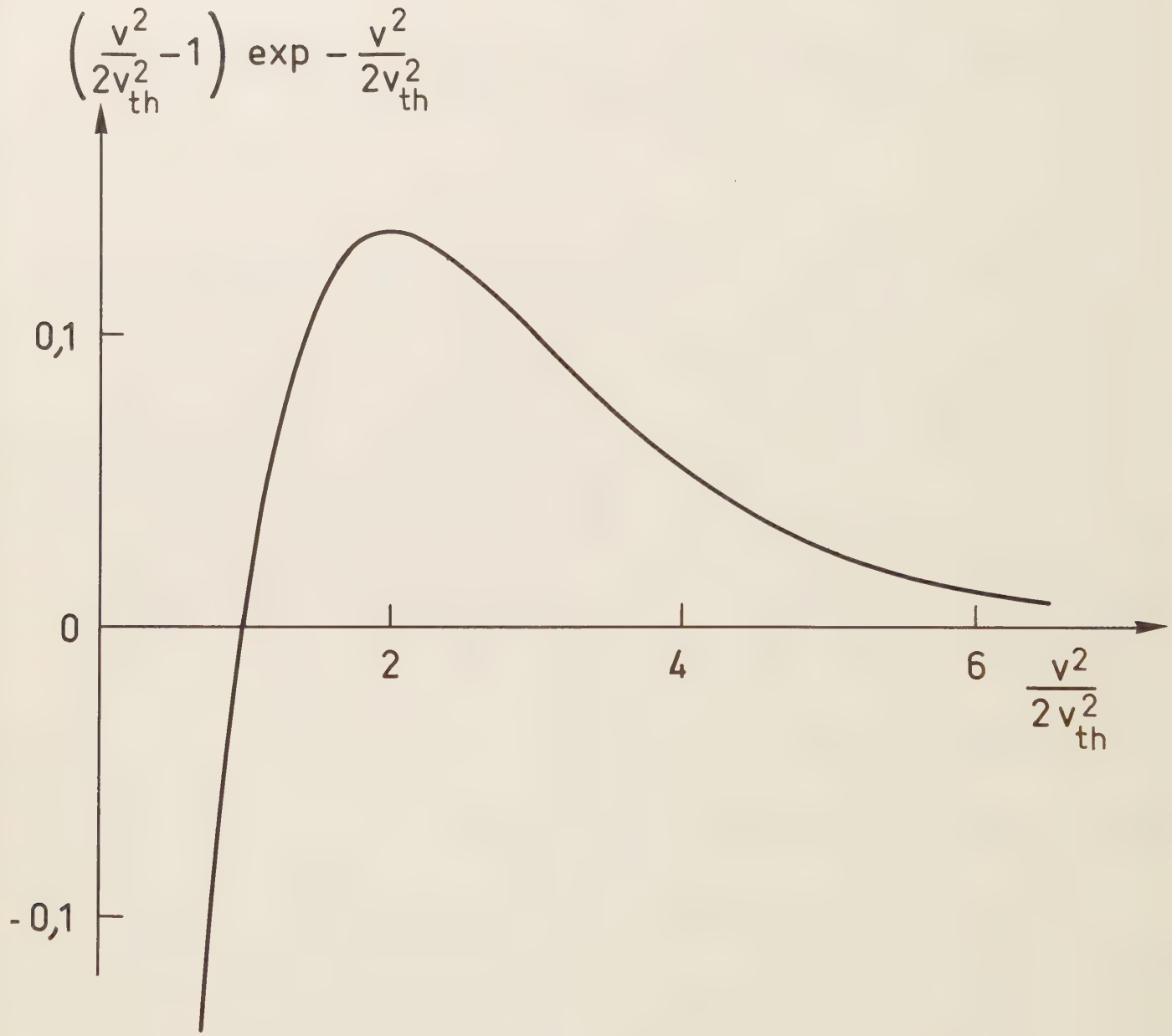


FIG V 3 REPRESENTATION DE LA FONCTION $\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}-1\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$ EN FONCTION DE $\frac{v^2}{2v_{th}^2}$

Soit :

$$(V.34)\quad \xi''(z) = \frac{2\,q^2}{\pi\, m_e^2\, \varepsilon_0\, S\, v_g} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\left[\mathcal{F}(\omega,z) - \mathcal{F}(\omega,z=0)\right]$$

Avec cette nouvelle variable, (V.29) s'écrit :

$$(V.35)\quad \frac{\partial F_0^{ad}(v,\xi'')}{\partial \xi''} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial v}\left[v\,\frac{\partial F_0^{ad}(v,\xi'')}{\partial v}\right]$$

Nous savons qu'une solution particulière de cette équation, dans le cas d'une distribution initiale maxwellienne peut s'écrire :

$$(V.36)\quad \boxed{F_0^{ad}(v,\xi'') = \frac{\sqrt{2}n_0}{\sqrt{\pi}\, v_{th}\left(1+\frac{\xi''}{2v_{th}^2}\right)} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2\left(1+\frac{\xi''}{2v_{th}^2}\right)}\right)}$$

$\xi''(z)$ dépend de la différence $\mathcal{F}(\omega,z) - \mathcal{F}(\omega,z=0)$ qui peut prendre le signe positif ou négatif.
La partie adiabatique de la fonction de distribution reste donc maxwellienne, avec une nouvelle valeur de la vitesse thermique.
La température électronique correspondante s'écrit :

$$(V.37)\quad T_e(z) = T_{eo}\left(1 + \frac{\xi''(z)}{2v_{th}^2}\right)$$

et peut présenter soit une diminution, soit une augmentation avec la distance. Pour évaluer cette variation de température, examinons le cas où l'amortissement Landau linéaire est négligeable.

$\mathcal{F}(\omega,z)$ est alors calculé à partir de l'expression (II.55) et pour une forme de $\mathcal{F}(\omega,z=0)$ représentée sur la figure V.4.a. Le calcul est développé dans l'annexe (V.C) et le résultat est donné sur la figure V.4.b, où $\frac{\xi''}{2vth^2}$ est exprimé en fonction de z. Du fait du choix particulier du flux de plasmons initial, ce cas conduit à un chauffage de la partie adiabatique de la fonction de distribution qui augmente avec la distance. Mais ce chauffage reste extrêmement faible puisqu'au bout de 20cm, $\frac{\xi''}{2v_{th}^2} = \frac{\Delta v_{th}}{v_{th}} = \frac{\Delta T_e}{T_{e0}}$ n'est que de 10^{-2}.

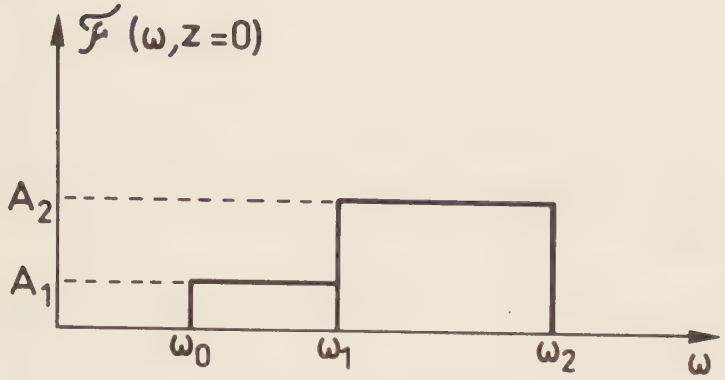
Ce résultat est d'ailleurs normal, puisqu'il y a conservation du flux de plasmons en l'absence d'amortissement Landau linéaire et que le terme sous l'intégrale en ω de (V.34) représente cette conservation au facteur $1/\omega$ près.

En dehors de ce cas particulier qui vient d'être évoqué, la différence $\mathcal{F}(\omega,z) - \mathcal{F}(\omega,z=0)$ est une quantité toujours négative, la variable ξ'' décroît donc avec la distance ; il en résulte un refroidissement de la partie adiabatique de la fonction de distribution. Ce refroidissement est faible et peut être calculé numériquement pour chaque cas expérimental.

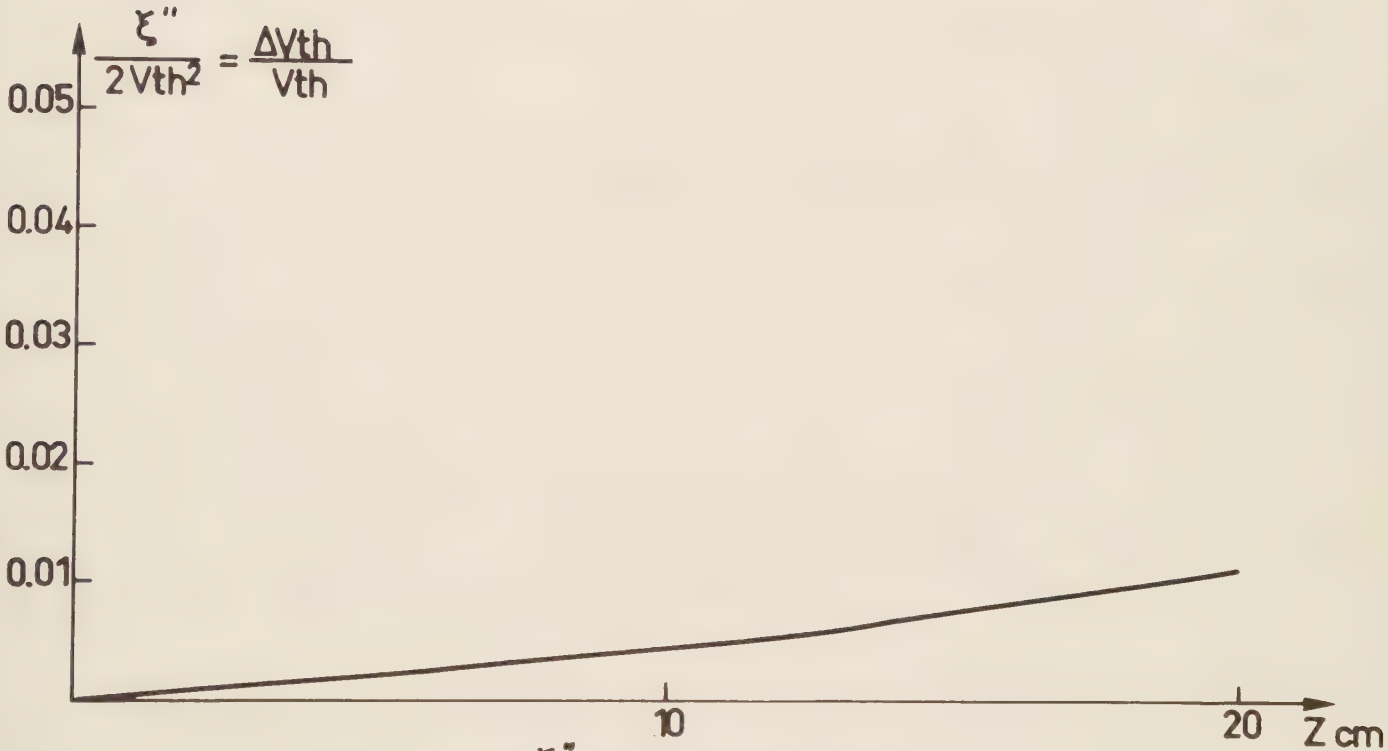
V.4.3 Autre méthode pour parvenir à une solution analytique

Une solution analytique de l'équation (V.29) peut être donnée dans certains cas.
Posons :

(V.38) $b^2(z) = \frac{q^2}{4\pi m_e^2} I(z)$ où I(z) est défini par (V.31)



a) flux initial de plasmons



b) variation de $\frac{\xi''}{2V_{th}^2}$ en fonction de Z

FIG.V 4. CROISSANCE DE LA VITESSE THERMIQUE DUE A L'INTERACTION QUASILINEAIRE DIRECTE ENTRE LE SPECTRE ET LA PARTIE ADIABATIQUE DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION.

Nous allons calculer une solution valable quand la quantité $\frac{v}{b(z)}$ est très petite devant l'unité.

L'équation (V.29) s'écrit :

$$(V.39)\quad \frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left[v\frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial v}\right]b^2(z)\right\}$$

Une intégration selon z nous permet d'écrire :

$$(V.40)\quad \frac{\partial^2 F_o^{ad}(v,z)}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial F_o^{ad}(v,z)}{\partial v} - \frac{F_o^{ad}(v,z)}{b^2(z)} = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

Q (v) est une fonction de v déterminée à partir de la condition initiale :

$$F_o\left(v, z=0\right) = \frac{\sqrt{2}\ n_o}{\sqrt{\pi}\ v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

Si $b_o \equiv b\ (z=0)$

Q (v) s'écrit :

$$(V.41)\quad Q(v) = \left(pv^2 + q\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

avec

$$(V.42)\quad p = \frac{\sqrt{2}\ n_o\ b_o^2}{\sqrt{\pi}\ v_{th}^5}$$

$$(V.43)\quad q = -\frac{\sqrt{2}\ n_o}{\sqrt{\pi}\ v_{th}}\left[1 + \frac{2b_o^2}{v_{th}^2}\right]$$

La solution analytique de (V.40) est de la forme :

$$(V.44)\quad F_o^{ad}(v,z) = \mathcal{E}(v,z)\, I_o\left[\frac{v}{b(z)}\right]$$

I_o est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro.

$\mathcal{C}(v,z)$ est une fonction de v et de z qui est obtenue par une méthode dite de "variation de la constante".

$$(V.45)\quad \mathcal{C}(v,z) = \int_0^v \frac{dv'}{v' b^2(z) I_o^2\left[\frac{v'}{b(z)}\right]} \int_0^{v'} v'' Q(v'') I_o\left[\frac{v''}{b(z)}\right] dv'' + (v=0,z)$$

Le calcul d'intégration peut être poursuivi pour $\frac{v}{b(z)} \ll 1$,

en développant $I_o\left(\frac{v}{b(z)}\right)$. Ce calcul fait l'objet de l' annexe VD, et le résultat est seul exprimé ici, on trouve :

$$(V.46)\quad \boxed{\mathcal{C}(v,z) = F_1 v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + F_2\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right] + F_3\left\{E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \mathrm{Log}_e\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \gamma\right\} + \mathcal{C}(v=0,z)}$$

avec
$$F_1 = \frac{v_{th}^4}{b^4(z)} \quad \frac{p}{4}$$

$$F_2 = \frac{v_{th}^4}{b^4(z)} \left\{p\, \bar{b}^2(z) + \frac{3}{2} v_{th}^2 \bar{} + \frac{q}{4}\right\}$$

$$F_3 = \frac{v_{th}^2}{b^2(z)} \left[1 + \frac{v_{th}^2}{b^2(z)}\right]\left[p\, v_{th}^2 + \frac{q}{2}\right]$$

p et q sont donnés respectivement par les expressions (V.42) et (V.43).

$E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$ est l'exponentielle intégrale d'ordre 0. Elle est telle que:

$$E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) = -\gamma - \log_e\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)^n}{n\, n!}$$

γ est la constante d'Euler ; $\gamma = 0{,}57721$.

La partie adiabatique de la fonction de distribution, peut donc être calculée. Elle varie avec la distance z par le paramètre b(z). $F_o^{ad}(v,z)$ ne peut être connue entièrement que si la fonction $\mathcal{C}(v=0,z)$ est définie.

Nous pouvons vérifier que la solution trouvée est telle que :

$$\left(\frac{\partial F_o}{\partial v}\right)_{v=o} = 0 \quad \forall z$$

Elle s'applique donc à nos cas particuliers expérimentaux.

Nous venons de voir que la variation avec la distance de $F_o^{ad}(v,z)$ dépend de $b^2(z)$, donc de I(z). Essayons d'analyser physiquement ce terme.

I(z) peut s'écrire :

$$(V.47)\quad I(z) = \underbrace{\int_o^{\infty} d\omega\, \frac{K_\omega^2}{\omega^2} \left\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z=o) \right\rangle \left\{ exp\left[-2K_i^+(\omega) z\right] - 1 \right\}}_{I_1(z)} + \underbrace{\frac{2\mathcal{F}(\omega,z)}{\varepsilon_o S v_g \overline{\omega}}}_{I_2(z)}$$

I(z) comprend un terme associé à l'effet Landau linéaire, $I_1(z)$. Dans ce terme, l'argument de l'exponentielle étant petit, l'exponentielle peut être développée et $I_1(z)$ est donné par :

$$(V.48)\quad I_1(z) = -2z \int_o^{\infty} d\omega\, \frac{K_i^2(\omega)}{\omega^2} K_i^+(\omega) \left\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^*(z=o) \right\rangle$$

$$= -\mathcal{B}\, z$$

Le terme $\mathcal{B}$ peut être calculé numériquement :

Le second terme $I_2(z)$ est obtenu en remplaçant ω par une valeur moyenne $\bar{\omega}$ /le spectre de turbulence expérimental a une largeur en fréquence de 25MHz ; ses fréquences minimum et maximum sont 68MHz et 93MHz/ Dans ces conditions $\frac{\mathcal{F}(\omega,z)}{\bar{\omega}}$ se conserve spatiallement, puisqu'une des propriétés de l'effet Landau non linéaire est la conservation du flux de plasmons. Si $\mathcal{F}(\omega,z) \equiv \mathcal{F}(\omega,z=0)$,
ce qui est toujours vrai en première approximation

(V.49) $\quad I_2(z) = \mathcal{A}$ indépendant de z

I(z) peut finalement s'écrire :

(V.50) $\quad I(z) = \mathcal{A} - \mathcal{B}z$

où $\mathcal{A}$ est le terme dominant.
Si nous reportons dans l'expression (V.39) l'expression (V.50) nous obtenons :

$$(V.51)\quad \frac{\partial F_0^{ad}(v,z)}{\partial z} = -\frac{q^2}{4\pi m e^2}\,\mathcal{B}\left[\frac{\partial^2 F_0^{ad}(v,z)}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial F_0^{ad}(v,z)}{\partial v}\right]$$

Cette équation différentielle est caractéristique d'un "piquage" de la fonction de distribution, donc elle correspond à un refroidissement des particules.

Avant de conclure, remarquons que l'influence du spectre de battement sur la partie adiabatique de la fonction de distribution est incluse implicitement dans les calculs du paragraphe V.4.

V.5 CONCLUSION

Dans le cadre de la théorie quasi-linéaire, nous venons d'examiner les termes qui peuvent conduire à une modification de la fonction de distribution des électrons. Compte tenu des conditions expérimentales, deux termes seulement seront à retenir lors de l'examen des résultats expérimentaux. Le terme dominant est dû à une interaction avec les particules de vitesse voisine de la vitesse de groupe des ondes du spectre.
Si on admet une variation de la vitesse de groupe, on peut montrer que quand la distance d'intéraction est augmentée, les particules correspondantes du plasma voient leur température augmenter. Ce terme de diffusion résonnante est proportionnel au carré de la puissance dans le spectre. L'autre terme concerne la variation de la partie adiabatique de la fonction de distribution sous l'influence du spectre. Il est proportionnel à la puissance du spectre, correspond à un refroidissement des particules dans la majorité des cas. Ce terme est toujours petit.

Ces résultats théoriques seront confrontés aux résultats expérimentaux au chapitre IX.

A N N E X E V.A

L'équation cinétique donnant l'évolution temporelle de la fonction de distribution peut se réduire à trois termes :

$$\frac{\partial F_o}{\partial t} = \frac{1}{n_o m_e}\int dk\, N_k\, k\, \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2\pi \omega_{pe}^2}{k^2\, \varepsilon(k',\omega')}\, \delta\left[\omega - kv\right]\, k\, \frac{\partial F_o}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \int dk' \frac{4\pi \omega_{pe}^4\; A^2_{k,k'}\; (k-k')\, N_{k'}}{n_o m_e \left|\varepsilon(k,\omega)\right| \left|\varepsilon(k',\omega')\right| \left|\varepsilon(k-k',\omega-\omega')\right|^2} \frac{\partial F_o}{\partial v}\, \delta\left[(\omega-\omega') - (k-k')\, v\right]\right]$$

$$+ \frac{1}{n_o m_e}\int dk\, N_k\, k\, \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\omega_{pe}^2}{k^2 \left|\varepsilon(k,\omega')\right|}\, pp\left[\frac{2\gamma_k^{Total}}{(\omega - kv)^2}\right] k\, \frac{\partial F_o}{\partial v}\right]$$

où γ_k^{total} est le taux de croissance total linéaire et non linéaire,

$$N_k = \frac{\varepsilon_o k^2}{2}\, \varphi_k^2\, \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \omega}$$

et :

$$A_{\kappa\kappa'} = \frac{1}{(\omega - \kappa v_0)^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{[\kappa - \kappa']^2} \int dv \left\{ \frac{\frac{\partial^2 F_0}{\partial v^2}}{(\omega - \kappa v)(\omega' - \kappa' v)} \right.$$

$$\left. + \frac{pp \ \frac{dF_0}{dv}}{(\omega - \omega') - (\kappa - \kappa') v} \left[\frac{\kappa'}{(\omega' - \kappa' v)^2} - \frac{\kappa}{(\omega - \kappa v)^2} + \frac{\kappa - \kappa'}{(\omega - \kappa v_0)^2} \right] \right\}$$

et

$$v_0 = \frac{\omega - \omega'}{\kappa - \kappa'}$$

Pour la relation particulière : $\varepsilon_L = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{\kappa v_g}{\omega}$

$$N_\kappa = \frac{\varepsilon_0 \kappa^2 \varphi_\kappa^2}{2\omega}$$

A N N E X E V.B

CALCUL DU TERME $\dfrac{A^2_{k,k'}}{\left|\varepsilon_L(k-k')\right|^2}$

Calcul de $A_{k,k'}$:

$A_{k,k'}$ est défini par la relation (V.12)

Pour $v_0 = \dfrac{\omega-\omega'}{k-k'} \simeq v_g < v_{\varphi k,k'}$, $A_{k,k'}$ s'écrit :

$$(V.B.1)\quad A_{kk'} = \frac{1}{\kappa^2\left[v_{\varphi\kappa}-v_g\right]^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(k-k')^2}\int dv\, \frac{PP\,\frac{\partial F_0}{\partial v}\,(\kappa-\kappa')}{\left[v_g(\kappa-\kappa')-(k-k')v\right]\left[\omega_\kappa-\kappa v_g\right]^2}$$

En utilisant la relation de dispersion particulière telle que :

$$\omega = \Omega + \kappa v_g$$

$$A_{kk'} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2(k-k')^2}\int \frac{dv\, PP\,\frac{\partial F_0}{\partial v}}{v_g - v}$$

(V.B.2) Soit :

$$\frac{A_{\kappa\kappa'}}{\varepsilon_L(\kappa-\kappa')} \lesssim \frac{1}{\Omega^2}$$

A N N E X E V.C

CALCUL DU TERME $\xi''(z)$

Le spectre initial choisi est tel que le flux de plasmons représenté sur la figure V.4a, s'écrit :

$$(C.1)\quad \mathcal{F}(\omega, z=0) = A_1\left[H(\omega_0) - H(\omega_1)\right] + A_2\left[H(\omega_1) - H(\omega_2)\right]$$

$H(\omega)$ est la fonction d' Heaviside.

Le flux total est tel que :

$$(C.2)\quad \mathcal{F}_T = A_1(\omega_1 - \omega_0) + A_2(\omega_2 - \omega_1)$$

et $\mathcal{F}(\omega,z)$ peut s'exprimer pour $\omega_0 < \omega < \omega_1$ et $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Pour $\omega_0 < \omega < \omega_1$:

$$(C.3)\quad \mathcal{F}_1(\omega,z) = \frac{A_1 \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z\right)}{\left\{\frac{A_1[\omega-\omega_0]}{\mathcal{F}_T}\left[1 - \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)\right] + \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)\right\}^2}$$

Pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$:

$$(C.4)\quad \mathcal{F}_2(\omega,z)=\frac{A_2\exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)}{\left\{\frac{A_1(\omega_1-\omega_0)+A_2(\omega-\omega_1)}{\mathcal{F}_T}\left[1+\exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)\right]+\exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)\right\}^2}$$

où β est défini par l'expression (II 39) et dépend de la forme de la relation de dispersion.

Posons $\frac{\omega}{\bar{\omega}}=\Omega \quad \frac{\omega_i}{\bar{\omega}}\ \Omega_i$ avec i = 0, 1, 2

1. Pour ω compris entre ω_0 et ω_1 ; soient les quantités :

$$(C.5)\quad a_1 = \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)$$

$$(C.6)\quad b_1 = \frac{1}{\left(\Omega_1-\Omega_0\right)+\frac{A_2}{A_1}\left(\Omega_2-\Omega_1\right)}\left[1-a_1\right]$$

$$(C.7)\quad c_1 = \frac{-\Omega_0}{\left(\Omega_1-\Omega_0\right)+\frac{A_2}{A_1}\left(\Omega_2-\Omega_1\right)}\left[1-a_1\right]+a_1$$

2. Pour ω compris entre ω_1 et ω_2 ;

$$(C.8)\quad a_2 = \exp\left(-\beta\bar{\omega}^2\mathcal{F}_T z\right)$$

$$(C.9)\quad b_2 = \frac{\frac{A_2}{A_1}}{\left(\Omega_1-\Omega_0\right)+\frac{A_2}{A_1}\left(\Omega_2-\Omega_1\right)}\left[1-a_2\right]$$

$$(C.10)\quad c_2 = \frac{(\Omega_1 - \Omega_0) - \frac{A_2}{A_1}\Omega_1}{(\Omega_1 - \Omega_0) + \frac{A_2}{A_1}(\Omega_2 - \Omega_1)}\left(1 - a_2\right) + a_2$$

Avec ces notations :

$$(C.11)\quad \mathcal{F}_1(\omega, z) = \frac{a_1 A_1}{(b_1\Omega + c_1)^2}$$

$$(C.12)\quad \mathcal{F}_2(\omega, z) = \frac{a_2 A_2}{(b_2\Omega + c_2)^2}$$

3. Le terme ξ'' donné par l'expression (V.34) est tel que :

$$(C.13)\quad \frac{\xi''}{\frac{2}{\pi}\frac{q^2}{m_e^2}\frac{1}{\epsilon_0 S v_g}} = Z = A_1\int_{\Omega_0}^{\Omega_1}\frac{d\Omega}{\Omega}\left\{\frac{a_1}{(b_1\Omega + c_1)^2} - 1\right\} + A_2\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\frac{d\Omega}{\Omega}\left\{\frac{a_2}{(b_2\Omega + c_2)^2} - 1\right\}$$

$$(C.14)\quad Z = Z_I + Z_{II}$$

$$(C.15)\quad Z_I = A_1\int_{\Omega_0}^{\Omega_1}\frac{d\Omega}{\Omega}\left\{\frac{a_1}{b_1^2\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2} - 1\right\}$$

$$Z_I = A_1\int_{\Omega_0}^{\Omega_1} d\Omega\,\frac{a_1}{b_1^2\,\Omega\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2} - A_1\,\mathrm{Log}\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right)$$

$\frac{a_1}{b_1^2\,\Omega\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2}$ peut se mettre sous la forme:

$$\frac{a_1}{b_1^2}\left[\frac{A}{\Omega} + \frac{B}{\Omega + \frac{c_1}{b_1}} + \frac{C}{\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2}\right]$$

Soit :

$$A\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2 + B\,\Omega\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right) + C\,\Omega = 1$$

vérifiée pour :

$$A \equiv \frac{b_1^2}{c_1^2} \qquad B \equiv -\frac{b_1^2}{c_1^2} \qquad \text{et} \qquad C \equiv -\frac{b_1}{c_1}$$

L'intégrale

$$Z_I = \frac{a_1}{b_1^2} A_1 \int_{\Omega_0}^{\Omega_1} d\Omega \left\{ \frac{\frac{b_1^2}{c_1^2}}{\Omega} - \frac{\frac{b_1^2}{c_1^2}}{\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)} - \frac{\frac{b_1}{c_1}}{\left(\Omega + \frac{c_1}{b_1}\right)^2} \right\} - A_1 \operatorname{Log} \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

s'écrit alors :

$$(C.16)\quad Z_I = A_1 \left\{ \frac{a_1}{c_1^2} \operatorname{Log}\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) - \frac{a_1}{c_1^2} \operatorname{Log}\left(\frac{b_1\Omega_1 + c_1}{b_1\Omega_0 + c_1}\right) + \frac{a_1}{c_1}\left(\frac{1}{b_1\Omega_1 + c_1} - \frac{1}{b_1\Omega_0 + c_1}\right) - \operatorname{Log}\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) \right\}$$

Z_{II} a une forme identique :

$$(C.17)\quad Z_{II} = A_2 \left\{ \left(\frac{a_2}{c_2^2} - 1\right) \operatorname{Log}\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) - \frac{a_2}{c_2^2} \operatorname{Log}\left(\frac{b_2\Omega_2 + c_2}{b_2\Omega_1 + c_2}\right) + \frac{a_2}{c_2}\left(\frac{1}{b_2\Omega_2 + c_2} - \frac{1}{b_2\Omega_1 + c_2}\right) \right.$$

Le calcul de $Z = Z_I + Z_{II} = \dfrac{\xi''}{\frac{2}{\pi}\frac{q^2}{m_e^2 \varepsilon_o S v_g}}$

a été fait pour $\beta\bar{\omega}^2 \mathcal{F}_T z$ variant de 0 à 4, $A_2 = 100 A_1$ et

$$\mathcal{F}_T = 2.10^{-11} \text{ Joule}$$

Le résultat des calculs se traduit sur la figure V.4b.

La figure C.1 montre les résultats partiels Z_1 et Z_{II} et la somme $Z_1 + Z_{II}$ qui est très faible.

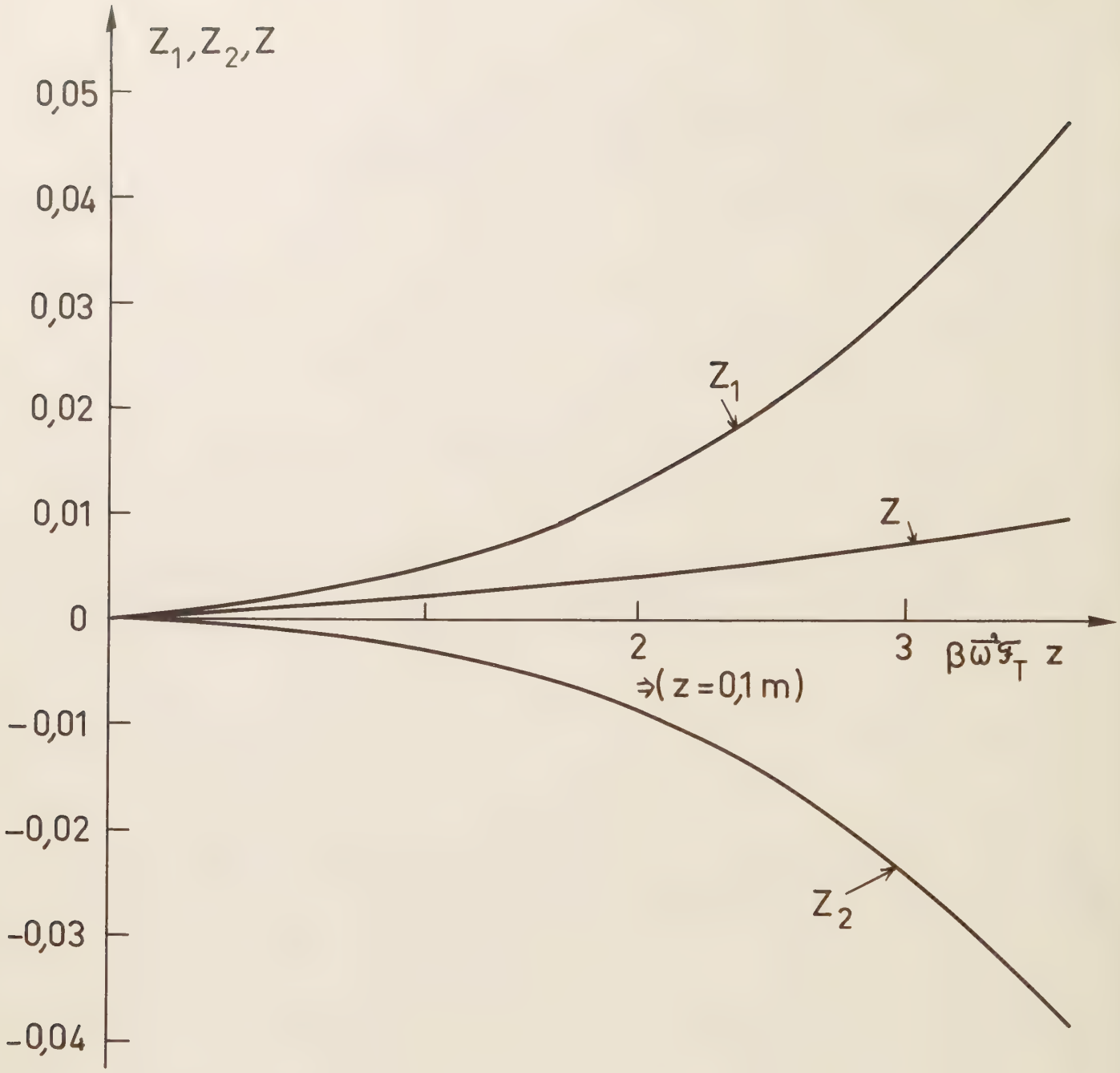


FIG. V C-1 . $Z = Z_1 + Z_2$

A N N E X E V.D

CALCUL DE $\mathcal{C}(v,z)$

1. ENONCE DU PROBLEME

(D.1) $$F(v,z) = \mathcal{C}(v,z)\, I_o\left(\frac{v}{b(z)}\right)$$

est solution de l'équation différentielle (V.40)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{F}{b^2(z)} = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

ce qui nous permet d'écrire :

(D.2) $$I_o\left(\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial v}\right) + \mathcal{C}\left(\frac{\partial^2 I_o}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial I_o}{\partial v} - \frac{I_o}{b^2(z)}\right)$$

$$+ 2\,\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial v}\,\frac{\partial I_o}{\partial v} = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

$\frac{\partial^2 I_o}{\partial v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial I_o}{\partial v} - \frac{I_o}{b^2(z)}$
étant identiquement nul,

nous déduisons :

$$I_o \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial v^2} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial v}\left[2\,\frac{\partial I_o}{\partial v} + \frac{I_o}{v}\right] = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

Posons $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial v} = y(v,z)$

(D.3) $$I_o \frac{\partial y}{\partial v} + y\left[2\frac{\partial I_o}{\partial v} + \frac{I_o}{v}\right] = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire (pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre):

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{y} = -\frac{\left[2\frac{\partial I_o}{\partial v} + \frac{I_o}{v}\right]}{I_o}$$

soit :

$$\text{Log } y = -2\,\text{Log } I_o - \text{Log } v + \text{Log}[C(z)]$$

(D.4) d'où $$y(v,z) = \frac{1}{v I_o^2}\lambda(v,z)$$

solution de l'équation avec second membre.

$\lambda(v,z)$ est une fonction telle que :

$$I_o \frac{\partial \lambda(v,z)}{\partial v}\frac{1}{v I_o^2} = \frac{Q(v)}{b^2(z)}$$

$$\lambda(v,z) = \int_0^v \frac{I_o\left[\frac{v'}{b(z)}\right] v' Q(v')\, dv'}{b^2(z)} + C(z)$$

Reprenons la valeur de $y(v,z) = \frac{\partial \mathcal{E}(v,z)}{\partial v}$

$$(D.5)\quad \frac{\partial \mathcal{E}(v,z)}{\partial v} = \frac{1}{v I_0^2\left[\frac{v}{b(z)}\right]} \left\{ \int_0^v \frac{I_0\left(\frac{v'}{b}\right) v' Q(v')}{b^2(z)} dv' + C(z) \right\}$$

Nous savons que $\frac{\partial \mathcal{E}(v,z)}{\partial v}$ doit être nul en v=0

Cette condition n'est réalisée que si C(z) = 0

Nous pouvons donc écrire :

$$(D.6)\quad \mathcal{E}(v,z) = \int_0^v \frac{dv'}{v' I_0^2\left[\frac{v'}{b(z)}\right]} \int_0^{v'} \frac{I_0\left[\frac{v''}{b(z)}\right] v'' Q(v'') dv''}{b^2(z)} + G(z)$$

du fait de la condition aux limites : $\frac{\partial \mathcal{E}(v,z)}{\partial v} = 0$ en v=0

$$G(z) = \mathcal{E}(v=0, z)$$

2. <u>CALCUL DE $\mathcal{E}(v,z)$</u> :

Pour poursuivre le calcul, nous supposons que $\frac{v}{b(z)}$ est << 1 et nous pouvons prendre un développement limité pour $I_0\left(\frac{v}{b(z)}\right)$

Soit :

$$(D.7)\quad I_0\left[\frac{v}{b(z)}\right] = 1 + \frac{v^2}{4 b^2(z)}$$

et :

$$Q(v) = \left(p v^2 + q\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2 v_{th}^2}\right)$$

p et q étant définis (expressions V.42 et V.43)

Calculons une première intégrale :

$$(D.8)\quad K_1 = \int_0^{v'} \left(p v''^3 + q v''\right)\left(1 + \frac{v''^2}{4b^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{v''^2}{2v_{th}^2}\right) dv''$$

$$K_1 = p\int_0^{v'}\left(v''^3 + \frac{v''^5}{4b^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{v''^2}{2v_{th}^2}\right)dv'' + q\int_0^{v'}\left(v'' + \frac{v''^3}{4b^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{v''}{2v_{th}^2}\right)dv''$$

or :

$$\int_0^{v'} v''^3 \exp\left(-\frac{v''^2}{2v_{th}^2}\right)dv'' = -v_{th}^2 v'^2 \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 2v_{th}^4\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

$$\int_0^{v'} v''^5 \exp\left(-\frac{v''^2}{2v_{th}^2}\right)dv'' = \left(-2v_{th}^2 v'^4 - 4v_{th}^4 v'^2\right)\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 8v_{th}^6\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

$$\int_0^{v'} v'' \exp\left(-\frac{v''^2}{2v_{th}^2}\right)dv'' = -v_{th}^2\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

Nous en déduisons :

$$(D.9)\quad K_1 = -p\frac{v_{th}^2}{4b^2(z)} v'^4 \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - v'^2\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)\left[p v_{th}^2 + \frac{p v_{th}^4}{b^2(z)} + \frac{q v_{th}^2}{4b^2(z)}\right]$$
$$-\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]\left[2p v_{th}^4 + 2\frac{p v_{th}^6}{b^2(z)} + q v_{th}^2 + q\frac{v_{th}^4}{2b^2(z)}\right]$$

Posons $\mu_o = \dfrac{b^2}{2v_{th}^2}$

K_1 s'écrit alors :

$$(D.10)\quad K_1 = -\frac{1}{2\mu_o}\left\{\frac{p}{4} v'^4 \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) + v'^2\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right)\left[p b^2(z)\left(1 + \frac{1}{2\mu_o}\right) + \frac{q}{4}\right]\right.$$
$$\left. + \left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]\left[2p v_{th}^2 b^2(z)\left(1 + \frac{1}{2\mu_o}\right) + q b^2(z)\left(1 + \frac{1}{4\mu_o}\right)\right]\right\}$$

Rappelons-nous maintenant que:

(D 11) $$\frac{\partial \mathcal{E}(v,z)}{\partial v} = \frac{K_1}{v I_0^2 b^2(z)}$$

Nous allons considérer deux cas : dans le premier cas, nous supposons que I_o au dénominateur est pris égal à 1 ; dans le second cas, nous faisons le calcul complet avec $I_0 = 1 + \frac{v^2}{4b^2(z)}$

4. PREMIER CALCUL DE $\mathcal{E}(v,z)$

En prenant au dénominateur de (D.11) $I_o = 1$, nous obtenons :

(D.12) $$\mathcal{E}(v,z) = A \underbrace{\int_0^v \frac{1}{v'}\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right] dv'}_{I_1} + B \underbrace{\int_0^v v' \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) dv'}_{I_2}$$
$$+ D \underbrace{\int_0^v v'^3 \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) dv'}_{I_3} + \mathcal{E}(v=0,z)$$

(D.13) avec $$A = -\frac{1}{2\mu_o}\frac{1}{b^2(z)}\left[2p v_{th}^2 b^2(z)\left(1 + \frac{1}{2\mu_o}\right) + q b^2(z)\left(1 + \frac{1}{4\mu_o}\right)\right]$$

(D.14) $$B = -\frac{1}{2\mu_o b^2(z)}\left[p b^2(z)\left(1 + \frac{1}{2\mu_o}\right) + \frac{q}{4}\right]$$

(D.15) $$D = -\frac{1}{2\mu_o b^2(z)}\frac{p}{4}$$

Calculons les intégrales :

$$I_1 = \int_0^v \frac{1}{v'}\left[\exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right] dv' = \frac{1}{2}\int_0^X \left[\exp\left(-\frac{X}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]\frac{dX}{X}$$

en posant $X = v^2$.

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left[e(-t) - 1\right] 2v_{th}^2}{2v_{th}^2\, t}\, dt \qquad \text{en posant } t = \frac{X}{2v_{th}^2}$$

D'après la formule 5 (p. 139) du "Handbook of maths" /5/

$$\int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt = E_1(z) + \mathrm{Log}_e(z) + \gamma$$

$E_1(z)$ est l'exponentielle intégrale de z et γ la constante d'Euler.

$$\gamma = 0,57721$$

$$I_1 = -\frac{1}{2}\left\{ E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \mathrm{Log}_e\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \gamma \right\}$$

$$I_2 = \int_0^v v' \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) dv' = -v_{th}^2\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

$$I_3 = \int_0^v v'^3 \exp\left(-\frac{v'^2}{2v_{th}^2}\right) dv' = -v_{th}^2 v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - 2v_{th}^4\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

En arrangeant les termes, nous trouvons finalement la formule qui a été utilisée dans le texte :

$$\mathcal{C}(v,z) = F_1 v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + F_2\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) - 1\right]$$

(D.16)

$$+ F_3\left\{ E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \mathrm{Log}_e\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \gamma \right\} + \mathcal{C}(v=0,z)$$

avec : $F_1 = \frac{v_{th}^4}{b^4(z)} \frac{p}{4}$

$$F_2 = \frac{v_{th}^4}{b(z)^4}\left[p\left(b^2(z) + \frac{3}{2} v_{th}^2\right) + \frac{q}{4}\right]$$

$$F_3 = \frac{v_{th}^2}{b(z)^2}\left[1 + \frac{v_{th}^2}{b^2(z)}\right]\left[p v_{th}^2 + \frac{q}{2}\right]$$

d'où

(D.17) $$\boxed{F_o^{ad}(v,z) = \mathcal{C}(v,z)\left[1 + \frac{v^2}{4b^2(z)}\right]}$$

5. SECOND CALCUL DE $\mathcal{C}(v,z)$

Si nous gardons au dénominateur $I_o\left(\frac{v}{b}\right) = 1 + \frac{v^2}{4b^2(z)}$ le calcul est un peu plus compliqué et donne le résultat suivant que nous n'utiliserons pas :

(D.18)
$$\mathcal{C}(v,z) = \frac{D}{4\mu_o} v^4 \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \left[D v_{th}^2\left(\frac{1}{\mu_o} - 1\right) + \frac{B}{4\mu_o}\right] v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

$$+ v_{th}^2\left[2D v_{th}^2\left(\frac{1}{\mu_o} - 1\right) + \frac{A}{2b^2(z)} + B\left(\frac{1}{2\mu_o} - 1\right)\right] \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)$$

$$+ \frac{A v^2}{4b^2(z)} - \frac{A}{2}\left[E_1\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \mathrm{Log_e}\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) + \gamma\right]$$

$$- \frac{A}{4\mu_o} - B v_{th}^2 - 2D v_{th}^4\left(\frac{1}{\mu_o} - 1\right)$$

A, B, D ont respectivement les valeurs déjà données dans les expressions D.13, D.14, D.15.

CHAPITRE V

BIBLIOGRAPHIE

/1/ R.C. DAVIDSON Methods in non linear plasma theory (1972) Academic Press.

/2/ G. LAVAL and R. PELLAT, Plasma Physics Les Houches (1972) Gordon and Breach

/3/ J. OLIVAIN, thèse, Rapport EUR-CEA-FC-602 (1971)

/4/ P. DENNERY and A. KRZYWICKI
Mathematics for physicists, Harper international edition (1967) p. 344

/5/ Handbook of maths.

CHAPITRE VI

DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET MESURE DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES DU PLASMA

DISCUSSION DES HYPOTHESES DU MODELE THEORIQUE.

Les expériences ont été faites sur le dispositif E.O.S., conçu et réalisé par ETIEVANT et PERULLI. De nombreuses descriptions existent [1, 2, 3, 4, 5, 6] et un bref résumé est rappelé ici. Les différentes méthodes de diagnostic utilisées concernent d'une part la mesure des grandeurs caractéristiques du plasma (densité, température, rayon du plasma, fonction de distribution électronique, mesure du potentiel plasma etc....), et d'autre part la structure des ondes (amplitude, nombre d'onde, amortissement, vitesses de phases et de groupe, structure radiale du potentiel des ondes etc....)

La connaissance des seuls paramètres du plasma permet déjà de discuter certaines conditions de validité du modèle théorique. Tout ce qui se rapporte plus particulièrement aux ondes sera étudié au chapitre suivant.

VI.1 DISPOSITIF EXPERIMENTAL E.O.S.

Une vue d'ensemble est présentée sur la figure VI-1. Le dispositif comprend une enceinte à vide placée dans un fort champ magnétique. Une source produit un plasma qui peut-être analysé grâce à un certain nombre de diagnostics. Le schéma de principe de la colonne de plasma est donné sur la figure VI-2.

VI.1-1 Ensemble mécanique

L'enceinte à vide est constituée par une chambre en acier inoxydable de section carrée (14 cm de côté), de longueur 1,50 m, reposant sur un bâti de 3 m environ. A chaque extrémité, une colonne de pompage (pompe primaire, pompe à diffusion, baffle à eau et piège à azote liquide) permet d'obtenir un vide de l'ordre de 10^{-8} torr en l'absence de plasma et de 10^{-6} torr en présence de plasma. A une extrémité de la chambre est placée la source de plasma, et à l'autre extrémité un analyseur d'énergie électrostatique. De nombreux hublots, situés sur deux faces opposées, servent à observer l'intérieur de l'enceinte et permettent le montage de sondes se déplaçant radialement. Une sonde, appelé "sonde z" est mobile longitudinalement et permet d'explorer le plasma sur une grande partie de sa longueur. Ces diverses sondes peuvent être utilisées soit en émettrices, soit en réceptrices.

VI.1-2 Enroulement magnétique.

Un champ magnétique stationnaire, homogène, variable continuement de 1300 à 7500 Gauss, est produit par un ensemble de 35 bobines, refroidies par une circulation d'eau sous pression. Les axes du champ magnétique et mécanique sont parallèles.

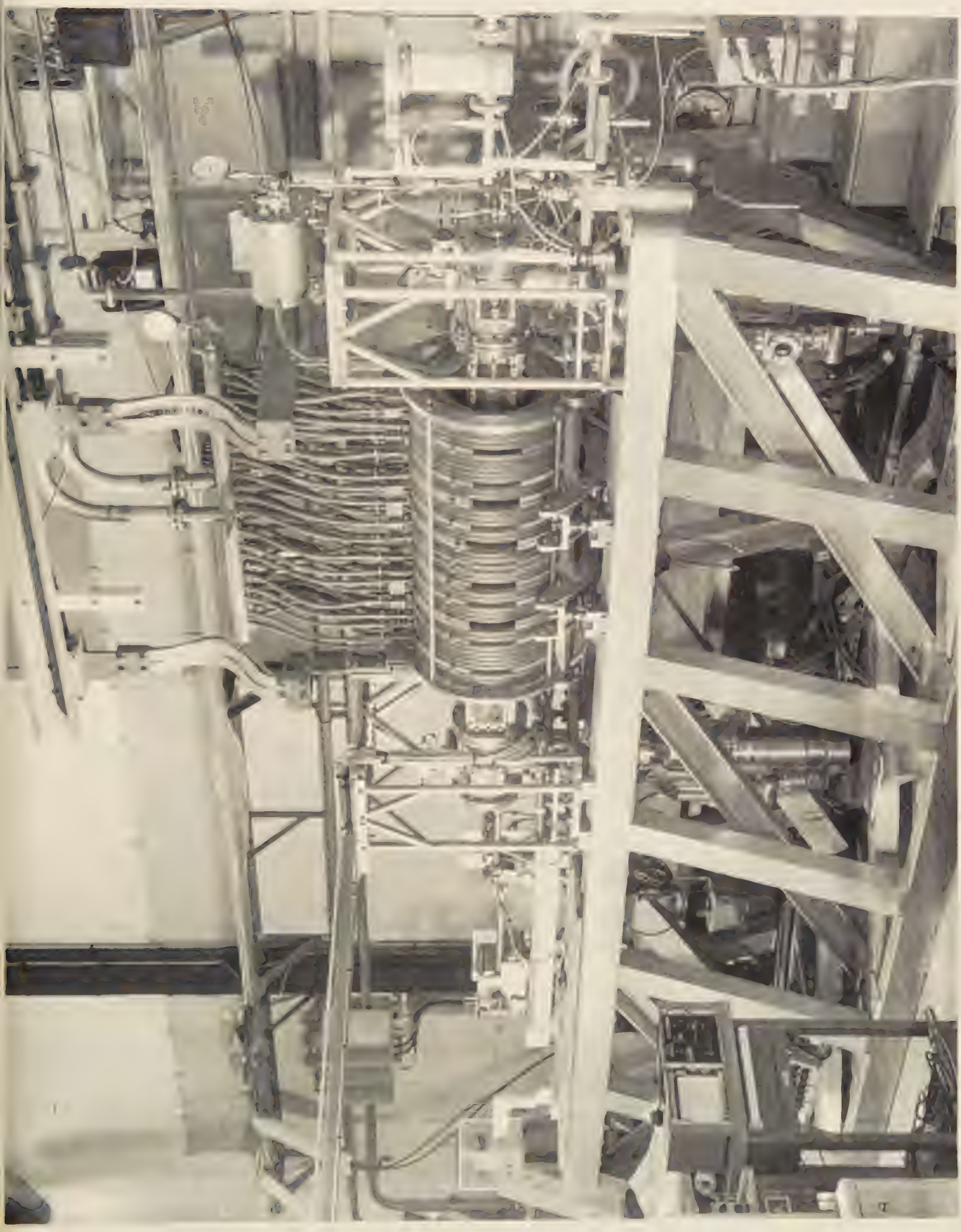


FIG. VI 1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL "E.O.S."
Vue d'ensemble

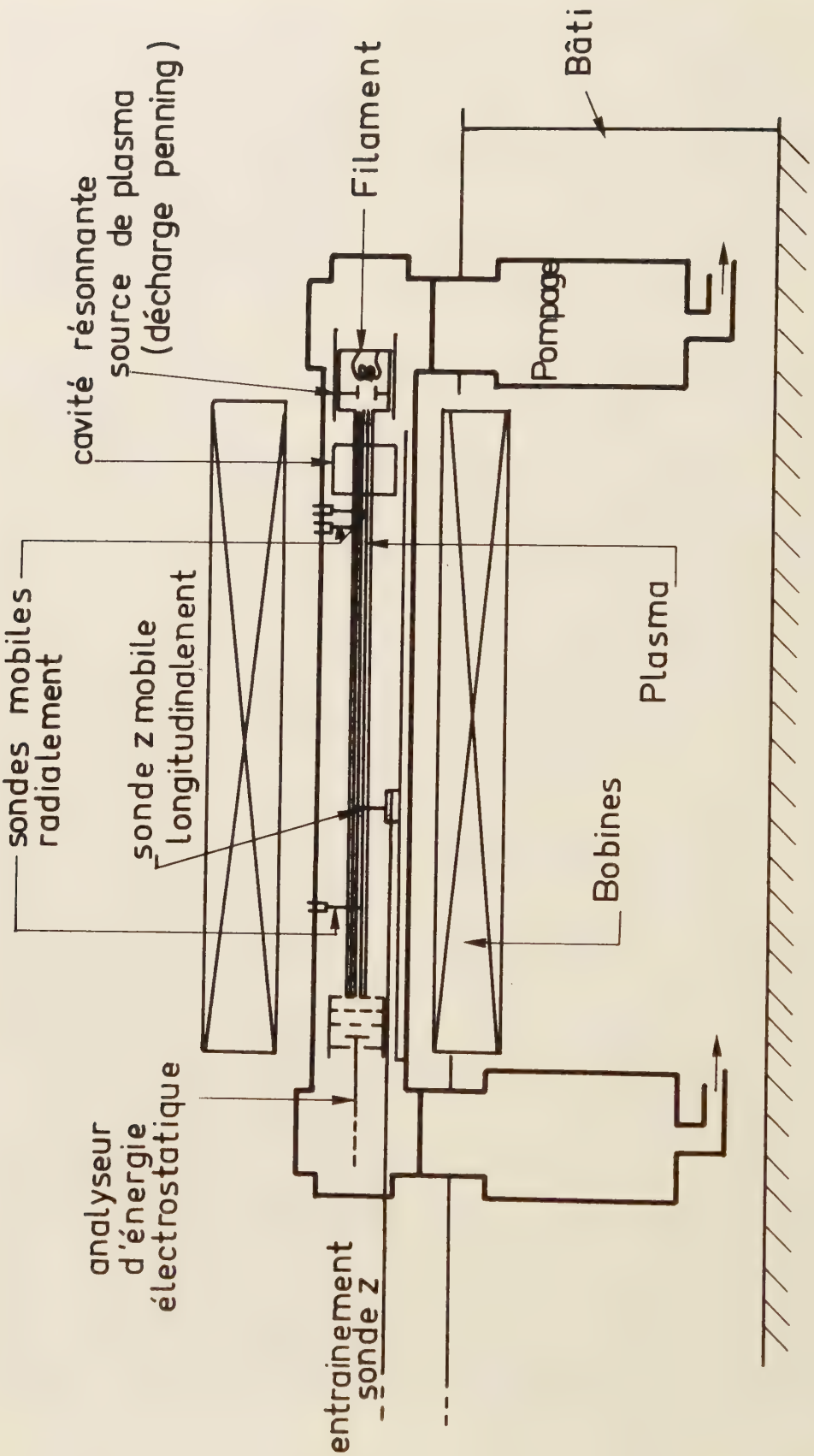


Fig. VI 2 SCHEMA DE PRINCIPE DE L'EXPERIENCE E.O.S

Le défaut d'homogénéité du champ magnétique le long de l'axe du dispositif est inférieur à $\pm$ 0,5% sur une longueur de 64 cm.

VI.1-3 Source de plasma.

Une décharge de type Penning à cathode chaude crée un plasma (le plus souvent d'argon), qui diffuse le long des lignes de force du champ magnétique par un trou de 2 mm de diamètre. La décharge fonctionne en régime continu et à faible pression (de l'ordre de 10^{-3} torr). Le corps de la source et l'anode de décharge, en acier inoxydable, sont refroidis par une circulation d'eau. Le plasma produit a une densité variant entre 10^7 et 10^9 el/cm^3.

VI.2 METHODES DE MESURE DES PARAMETRES DU PLASMA.

La connaissance du plasma implique la mesure de différents paramètres : densité, température (ainsi que leurs fluctuations spatiales et temporelles), fonction de distribution des vitesses électroniques, et détermination du potentiel plasma en particulier.

VI.2-1 Mesure de la densité et du profil de densité.

a) la densité électronique moyenne est mesurée de façon permanente à l'aide d'une cavité hyperfréquence /1,....6/ accordée sur le mode TM_{020}, insensible à l'action du champ magnétique. La mesure du déplacement en fréquence de la résonance permet de remonter à une valeur moyenne de la densité du plasma. La cavité résonnante est située juste après l'orifice de diffusion du plasma.

b) le profil radial de densité est mesuré à l'aide d'une sonde de langmuir /4/ fig.VI.3. Connaissant le profil radial de

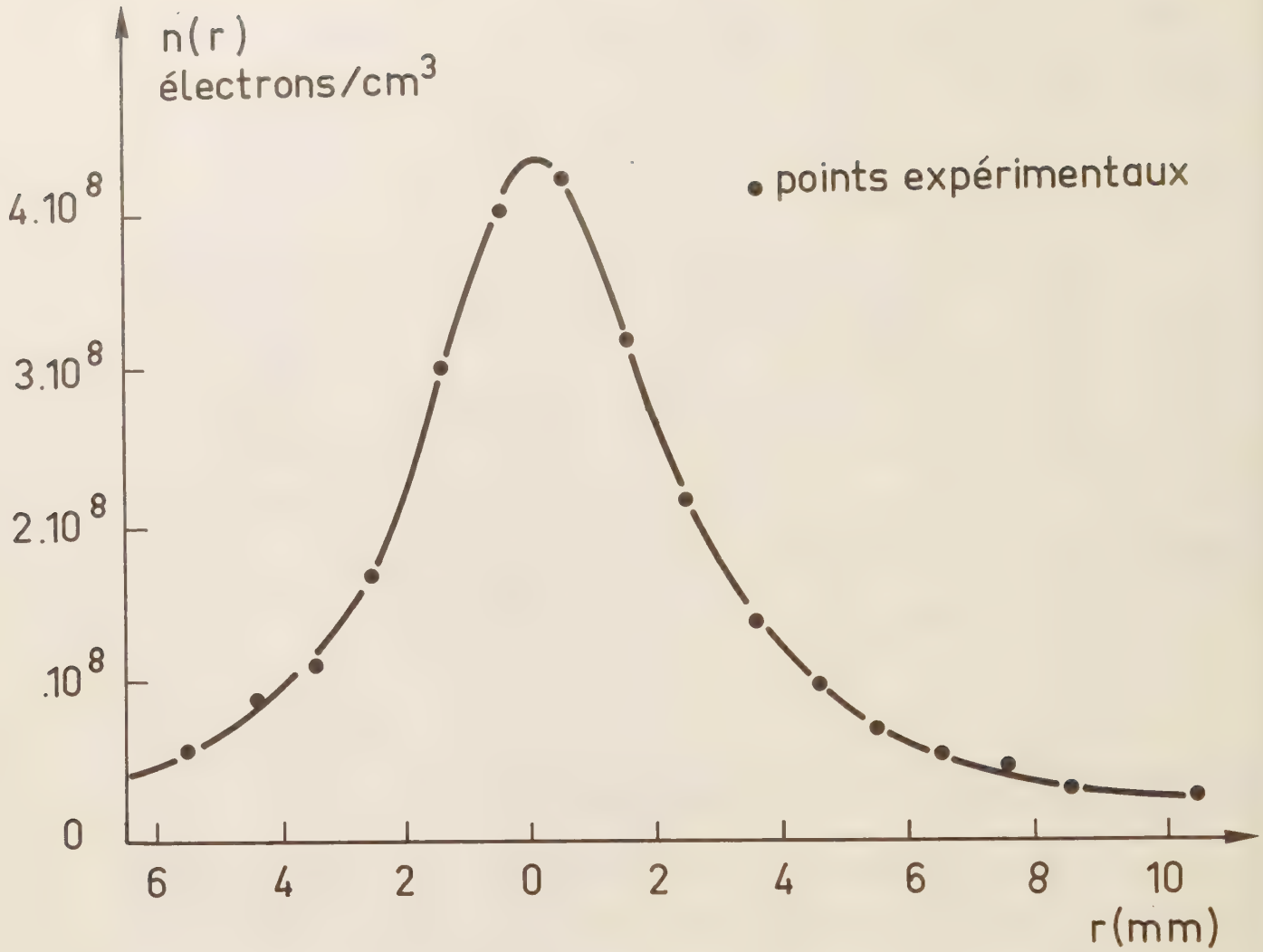


FIG. VI 3 ; PROFIL DE DENSITE OBTENU AVEC UNE SONDE CYLINDRIQUE.

PLASMA D'ARGON ; B_o = 2250 GAUSS

DENSITE MOYENNE DONNEE PAR LA CAVITE :

$\langle n(r) \rangle = 2{,}9 .10^8$ el/cm^3

(D'aprés : QUEMENEUR – EUR-CEA n° 529)

densité, et la valeur moyenne $\langle n(r) \rangle$ donnée par la cavité, on peut trouver une valeur de la densité sur l'axe n(o) :

$$(VI.1) \qquad n(0) = \langle n(r) \rangle \frac{\int_0^R J_0^2 \left(\varepsilon_{02} \frac{r}{a}\right) r\, dr}{\int_0^R f(r)\, J_0^2 \left(\varepsilon_{02} \frac{r}{a}\right) r\, dr}$$

où R est le rayon du plasma, a le rayon de la cavité, f (r) le profil de densité normalisé, et ε_{02} le deuxième zéro de la fonction de Bessel J_0.

c) le déplacement d'une sonde de langmuir, polarisée négativement, le long de l'axe de la colonne, montre qu'il existe un gradient longitudinal de densité qui a pour effet de modifier les longueurs d'onde longitudinales. Ce gradient, qui dépend des conditions expérimentales, peut atteindre 20% sur la longueur de la colonne.

d) les fluctuations temporelles de densité sont essentiellement des oscillations basse fréquence (F < 5 MHz). Ces variations sont responsables de la perte de corrélation entre les signaux collectés par deux sondes séparées par une distance z. Au chapitre IX, nous exploiterons cet effet pour évaluer quantitativement le taux de fluctuations du milieu.

VI.2-2 Mesure de la température électronique.

Elle est mesurée à l'aide d'une sonde de Langmuir ou à partir de la fonction de distribution électronique, elle est de l'ordre de quelques eV /2 à 5 eV/ pour les plasmas d'argon utilisés.

La température électronique, constante radialement, présente un faible gradient longitudinal, inférieur à 15% sur toute

la longueur de la colonne. Il existe des fluctuations de température de l'ordre de quelques %.

VI.3 MESURE DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DES ELECTRONS.

En bout de chambre de diffusion est installé un analyseur électrostatique à grilles, qui permet d'étudier la forme de la fonction de distribution des électrons. La fonction de distribution est obtenue après dérivation du courant électronique collecté par l'analyseur [7, 8, 9].

VI.3-1 Théorie de l'analyseur électrostatique

La présence du champ magnétique B_0 rend le plasma anisotrope et conduit à décomposer la vitesse de chaque particule suivant deux directions, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à B_0. La vitesse peut s'écrire $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$. La vitesse $\vec{v}_{\perp}$ confère à la particule un mouvement de rotation autour de l'axe du champ magnétique B_0 de fréquence $\omega_{ce} = \frac{qB_o}{me}$. A la vitesse $\vec{v}_{//}$ est associée une énergie $E_{//}$, et on peut définir une fonction de distribution des électrons le long de l'axe B_0. Soit $f(v_{//})$ cette fonction que nous désignerons ensuite par $f(v)$. Le nombre de particules ayant une vitesse comprise entre $v_{//}$ et $v_{//} + dv_{//}$ est égal à

(VI2) $\quad dn_{//} = n_o f(v_{//})\, dv_{//}$

Si une grille d'analyse est portée à u ne tension V_a, telle que $V_a = V_g - V_p$ (V_g est le potentiel de la grille et V_p le potentiel plasma), elle collecte les électrons d'énergie supérieure à eV_a,

c'est-à-dire les électrons dont la vitesse est supérieure à v_a telle que $v_a = \frac{2e\ V_a}{m_e}$

Le courant collecté sur cette grille d'analyse s'écrit :

(VI 3) $$I(v_a) = s n_o e \int_{v_a}^{\infty} f(v)\, dv$$

où s est la surface collectrice normale à B_0.

Si la fonction $f(v)$ est remplacée par la fonction de distribution exprimée en énergies, notée $f(V)$, le courant s'exprime en fonction de la tension d'analyse V_a

(VI 4) $$I(V_a) = - s \frac{e^2}{m_e} n_o \int_{V_a}^{\infty} f(V_a)\, d\, V$$

soit :

(VI 5) $$\boxed{\frac{dI(V_a)}{dV_a} = \frac{se^2}{m_e} n_o\ f\ (V_a)}$$

La dérivée du courant collecté par rapport à la tension d'analyse est proportionnelle à la fonction de distribution en énergie des électrons.

Si $n_o\, f(v)$ est la fonction maxwellienne définie au chapitre II (expression II 38).

(VI 6) $$F_o(V) = n_o \sqrt{\frac{2m_e}{\pi k\ T_e}}\ \exp\ \left(-\frac{eV}{k_B T_e}\right)$$

Le courant collecté est une fonction exponentielle, dont la courbe représentative, tracée sur papier semi-logarithmique est une droite. La pente de cette droite permet une mesure de la température électronique.

VI.3-2 Dérivation du courant électronique

Si on superpose à la tension d'analyse V_a, une tension

de forme $u \cos(\omega t)$, telle que :

$$|u| << |V_a|$$

et $\frac{2\pi}{\omega} << T_a$ où T_a est la période de balayage de la tension V_a,
le courant collecté s'écrit :

$$I(V_a + u\cos(\omega t)) \# I(V_a) + \frac{dI}{dV_a} u\cos(\omega t) + \frac{d^2 I}{dV_a^2} \frac{u^2}{2} \cos^2(\omega t) + \frac{d^3 I}{dV_a^3} \frac{u^3}{6} \cos^3(\omega t) + \ldots$$

soit

$$(VI\ 7)\quad I(V_a + u\cos(\omega t)) \# I(V_a) + u\cos(\omega t)\left[\frac{dI}{dV_a} + \frac{u^2}{24} \frac{d^3 I}{dV_a^3}\right] + u^2 \cos(2\omega t)\left[\frac{1}{4} \frac{d^2 I}{dV_a^2} + \ldots\right] + u^3 \cos(3\omega t)\left[\ldots\right]$$

Si on détecte à la fréquence ω, le seul terme important est $u\cos(\omega t)\frac{dI}{dV_a}$ qui donne $f(V_a)$.

Une détection synchrone de ce terme, pilotée par le signal de modulation u cos ωt,, permet après amplification et filtrage d'accéder à $f(V_a)$.

VI.3-3 Description de l'analyseur

L'analyseur électrostatique se compose de cinq électrodes : la première, munie d'une grille, joue le rôle de diaphragme d'entrée définissant la surface de collection des particules. Elle est polarisée à un potentiel V_e voisin du potentiel plasma, afin d'éliminer la gaine d'ions qui pourrait se former à l'entrée de l'analyseur. La seconde électrode, portée à un potentiel positif V_i, réfléchit les ions. La troisième électrode est une grille d'analyse à laquelle est appliquée une tension variable V_a, et qui laisse passer les électrons ayant une énergie supérieure à eV_a.

Le courant électronique est recueilli sur un collecteur porté à un potentiel positif V_c . Un anneau de garde porté au même potentiel que le collecteur est placé après et constitue la cinquième "électrode".

L'analyseur est représenté sur la fig.VI.4. Les électrodes 2, 3, en acier inoxydable sont percées d'un trou central d'un diamètre de 3 mm. L'électrode d'entrée est percée d'un trou central de 2 mm de diamètre et est recouverte par un disque d'alumine percé d'un trou central de 3 mm de diamètre. L'électrode d'entrée présente donc un anneau collecteur de 1 mm de largeur et peut servir le cas échéant de sonde collectrice. Les électrodes d'entrée et d'analyse sont recouvertes d'une grille. Les grilles de tungstène utilisées ont un pas de 200 µ avec un diamètre de fil de 10 µ. Le coefficient de transparence de telles grilles est voisin de 90% et le courant collecté garde ainsi une valeur acceptable. Les trous des grilles de dimensions très supérieures au rayon de giration des électrons ($r_{Le} \simeq 30\mu$), n'arrêtent pas les électrons.

La présence des grilles a le double avantage de mieux définir le potentiel sur le passage du courant de particules et de diminuer l'influence d'une électrode sur l'autre (annexe VI A, B). Elle a cependant un inconvénient : les grilles doivent être souvent démontées pour être nettoyées, car elles se recouvrent rapidement d'un fin dépôt de matières organiques, ce qui diminue d'autant la sensibilité de l'analyseur. Cet analyseur ne peut en aucun cas servir à des mesures absolues. Un autre analyseur peut aussi être utilisé [10], de dimensions plus grandes, sans grilles, mais où d'autres phénomènes (moins bonne définition des tensions d'électrodes, temps de transit plus long, effets de charge d'espace plus grands) consti-

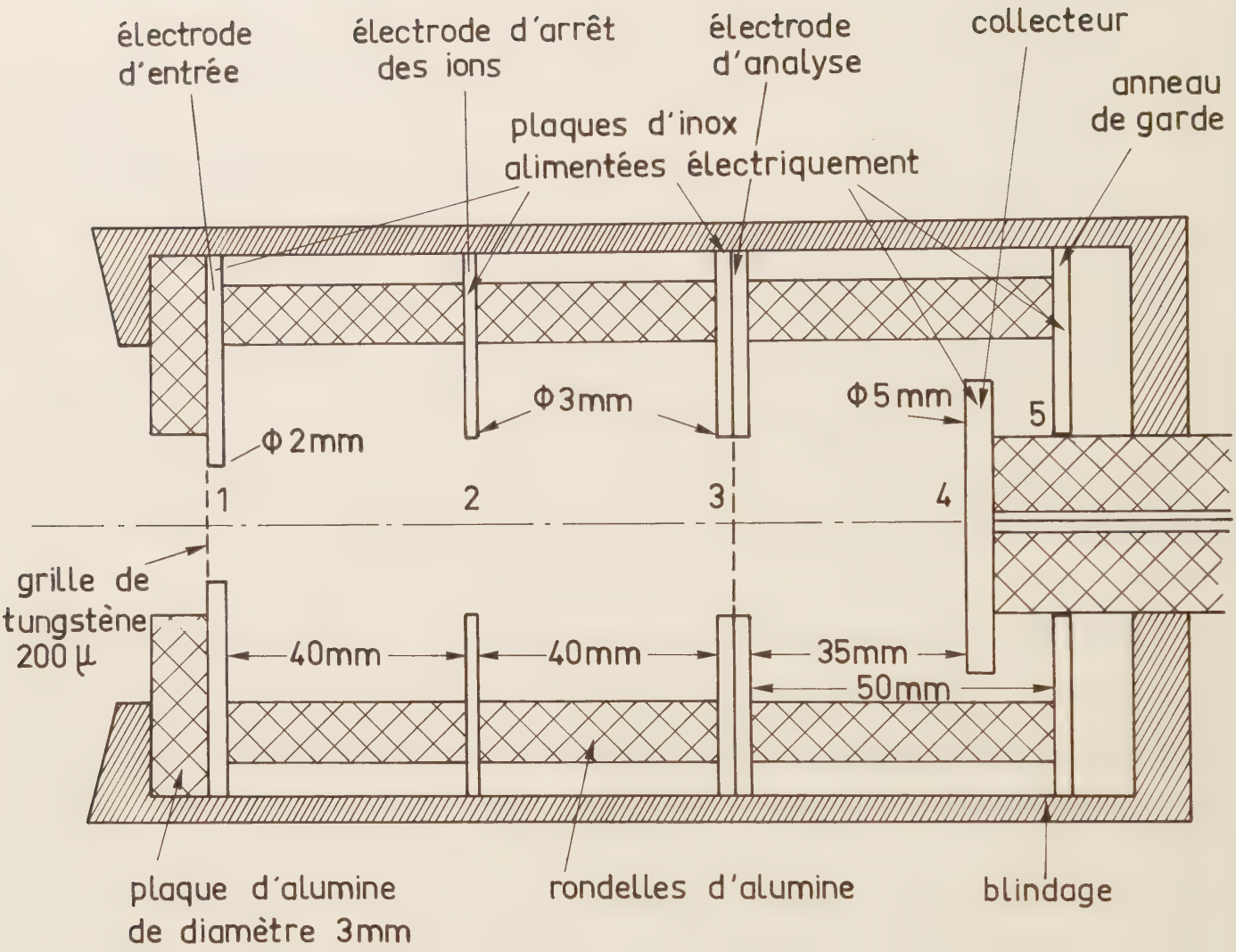


FIG. VI. 4. SCHEMA DE L'ANALYSEUR D'ENERGIE

tuent d'autres désavantages.

Rappelons que les phénomènes de charge d'espace apparaissent après l'électrode d'arrêt des ions et jusqu'au collecteur. Une limite supérieure du potentiel ΔV se superposant au potentiel d'analyse a été donnée [5, 10] ; elle est inférieure à 1 volt dans le cas de l'analyseur décrit ci-dessus. Un autre inconvénient de la charge d'espace est de limiter la densité de courant maximum collectée pour que des électrons ne soient pas réfléchis ; elle doit pourtant être supérieure à la densité de courant $J = \int_0^\infty vf(v)dv$. La valeur limite de J, donnée par la loi de Schield Langmuir,

$$(VI.8)\quad J_{max} = \frac{4}{9}\,\varepsilon_o \sqrt{\frac{2e}{me}}\,\frac{(V_{coll} - V_a)^{\frac{3}{2}}}{b^2}$$

où b est la distance entre le collecteur et l'électrode d'analyse (égale à 4 mm), doit être supérieure à 10 A/m^2 pour un plasma de vitesse thermique égale à 8.10^5 m/s et de densité égale à 10^8 électrons par centimètre cube ; ce qui impose $(V_c - V_a) \geq 10$ volts, toujours réalisé.

Le calcul du temps de transit d'un électron pénétrant dans l'analyseur donne une valeur de l'ordre de 10^{-8} s pour un électron à la vitesse thermique. Ce temps est comparable à la période des ondes excitées ($T \simeq 10^{-8}$ s).

VI.3-4 Mesure du courant et de la fonction de distribution

La grille d'analyse est reliée à un dispositif potentiométrique entrainé électriquement, qui fournit une tension lentement variable, et à un transformateur basse fréquence (10 kc/s) assurant la modulation de V_a. L'amplitude de la tension aux bornes du secon-

daire du transformateur est de l'ordre de 100 mV, afin de respecter la condition $|Va| >> u$. Le courant électronique est recueilli aux bornes d'une résistance de 100 kΩ . (Fig.VI.5). La partie oscillante du courant, comportant les termes en ω, 2ω , 3ω est envoyé sur le détecteur synchrone, accordé sur la fréquence ω. Le signal recueilli aux bornes de la résistance de 100 kΩ , qui représente le courant collecté, ou bien le signal de sortie du détecteur synchrone, qui représente la fonction de distribution, sont ensuite envoyés sur la voie Y d'un enregistreur "XY", dont le balayage horizontal est proportionnel à V_a (Fig.VI.5).

La tension d'entrée de l'analyseur V_e est choisie la plus voisine possible du potentiel plasma, dont il sera question au paragraphe VI.4. La figure VI.6 montre les variations du courant collecté par l'analyseur pour différentes valeurs de la tension d'entrée. La tension choisie est celle pour laquelle apparaît une saturation sur le courant maximum du collecteur. Au dessus de cette valeur, une augmentation de V_e n'entraine qu'une augmentation du courant de saturation.

Par dérivation du courant électronique, on obtient une fonction de distribution électronique qui a la forme d'une maxwellienne limitées aux vitesses positives (Fig.VI.7). L'origine du potentiel n'est pas connue avec précision, du fait de l'incertitude qui existe sur la détermination du potentiel plasma.

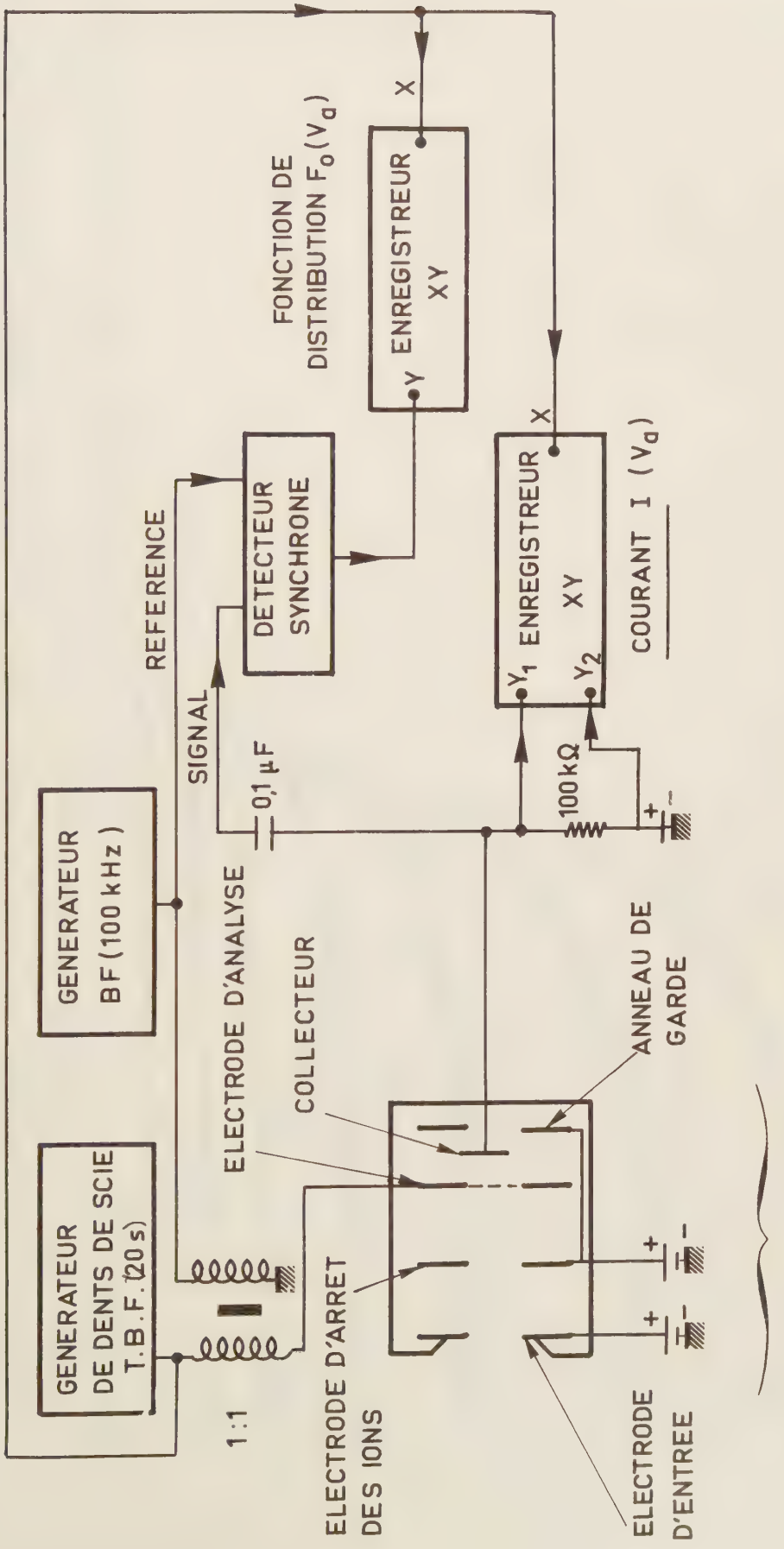


FIG. VI 5 — DISPOSITIF D'ENREGISTREMENT ET DE DERIVATION DU COURANT COLLECTE PAR L'ANALYSEUR

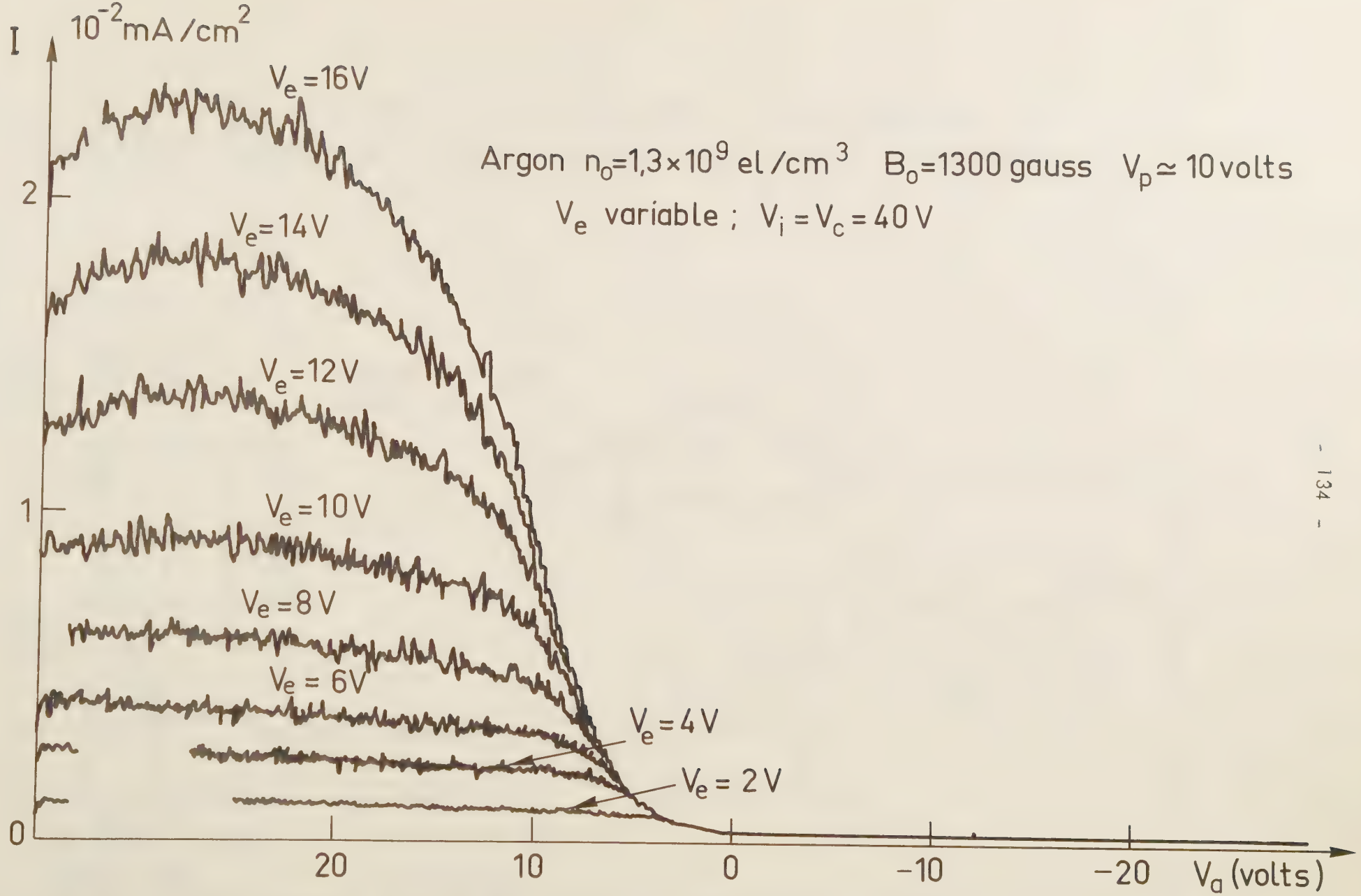


FIG. VI 6. VARIATIONS DU COURANT COLLECTE POUR DIFFERENTES TENSIONS D'ENTREE

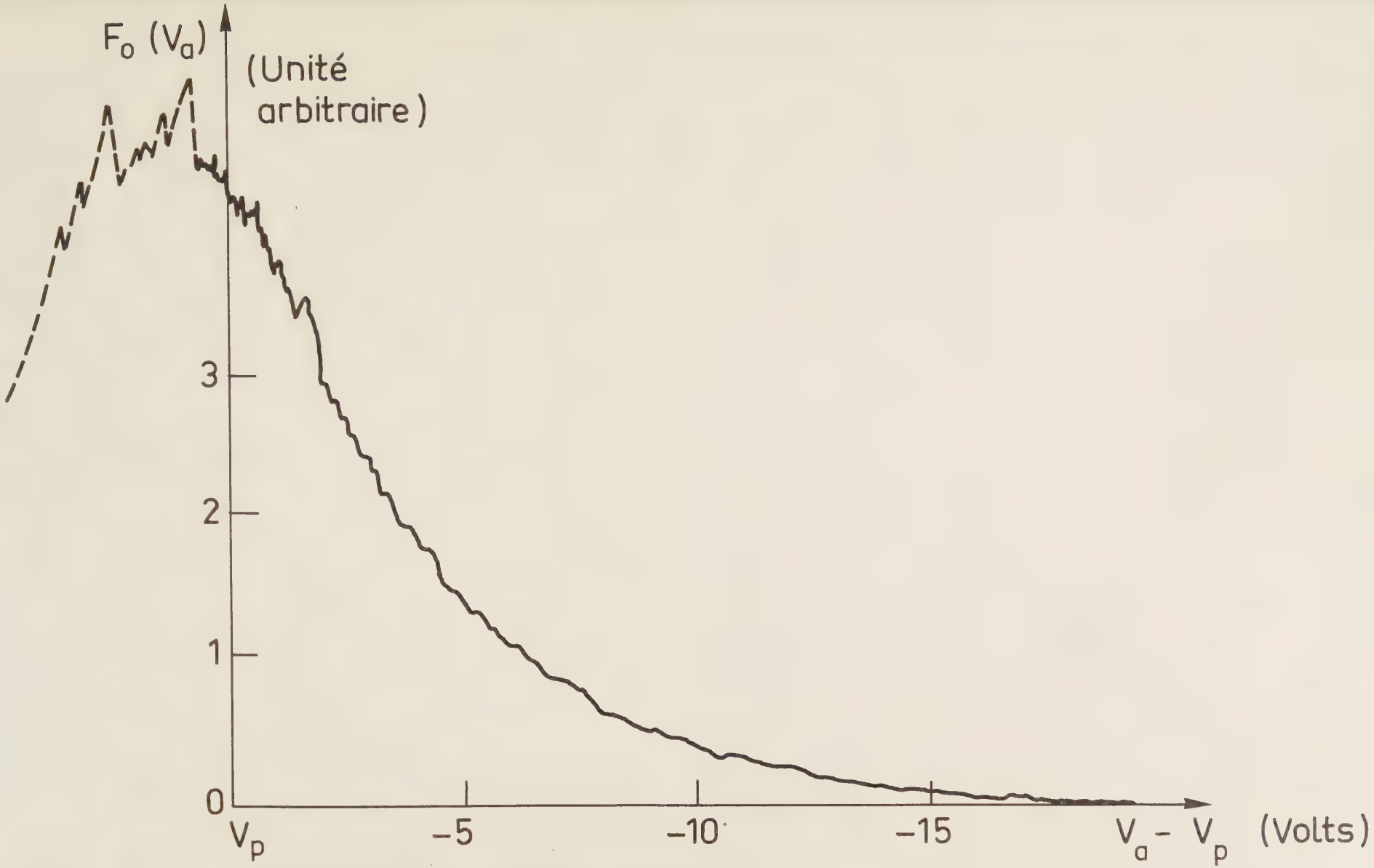


FIG. VI 7 FONCTION DE DISTRIBUTION $F_o(V)$

Plasma d'argon ; $n_o = 1{,}3 \cdot 10^8$ el/cm^3 ; $B_o = 1500$ Gauss ; $V_e = +12$ V

$V_i = V_c = 40$ V modulation (100 kHz ; amplitude 0,2 V)

VI.4 DETERMINATION DU POTENTIEL PLASMA.

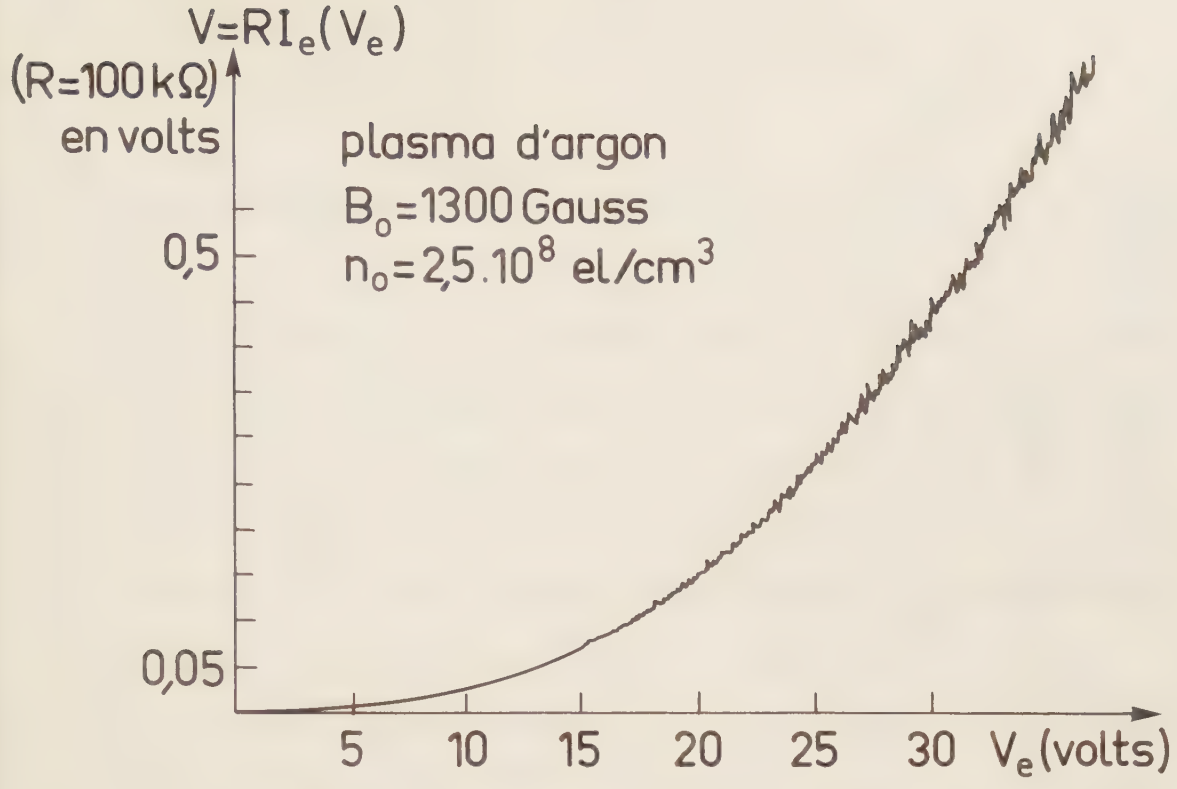
Plusieurs mesures du potentiel plasma peuvent-être faites. Citons pour mémoire, une première méthode utilisant une sonde émissive décrite dans les références [2] et [11].

VI.4-1 Utilisation de la caractéristique d'entrée de l'analyseur.

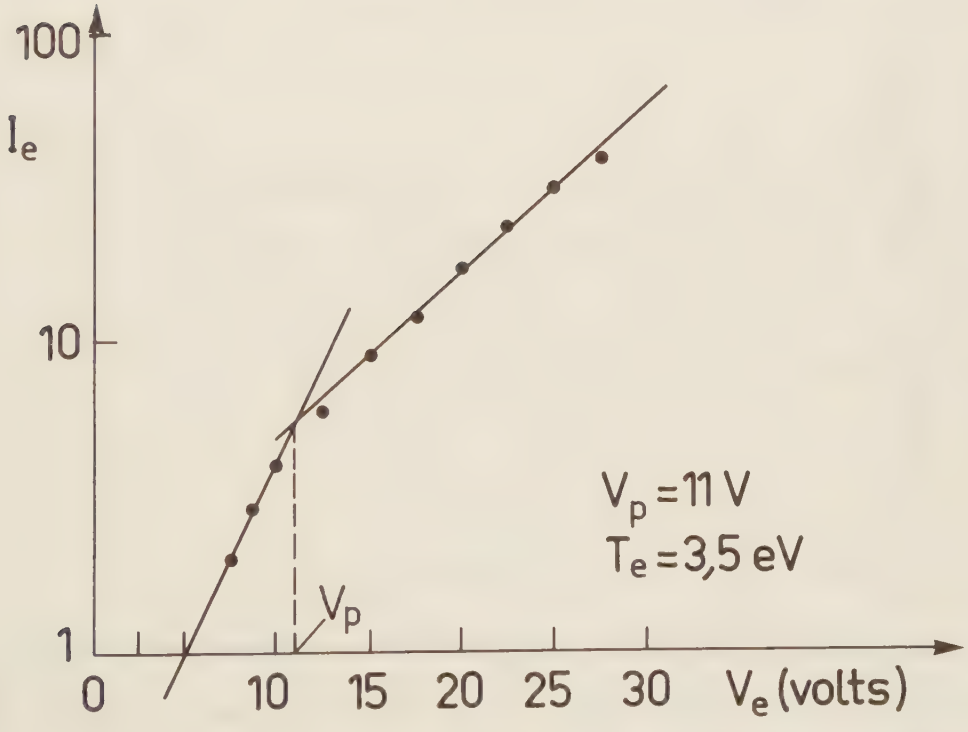
Nous avons vu qu'il subsiste un anneau collecteur à l'entrée de l'analyseur. Le courant collecté sur une résistance de 100 kΩ à l'allure représentée sur la figure VI.8-a. Si on reporte les valeurs de ce courant sur papier semilogarithmique, on constate que ces valeurs se répartissent sur deux droites, dont l'intersection donne la valeur du potentiel plasma (Fig.VI.8-b). La température électronique est aussi donnée sur cette figure. Dans ce cas de figure semblant présenter deux valeurs possibles de la température, on choisira en principe celle correspondant aux plus faibles valeurs du potentiel d'analyse.

VI.4-2 Intéraction avec une onde monochromatique

Une autre méthode utilise la déformation du courant collecté par l'analyseur, dans le cas d'une intéraction du plasma avec une onde monochromatique [2, 7, 12]. Une onde plasma électronique de faible amplitude, modulée à la fréquence Ω (Ω = 10 ou 100 kHz), est excitée dans le plasma. Le courant $J_o^{(2)}$ collecté à cette fréquence est mesuré à l' aide d'un détecteur synchrone callé sur la fréquence Ω. Ce courant $J_o^{(2)}$ a un comportement résonnant pour une valeur de la tension d'analyse qui correspond à la vitesse de phase de l'onde. La détermination du nombre d'onde k_r de l'onde excitée permet d'évaluer l'énergie correspondant à cette vitesse de phase,



8.a – courant $I_e = f(V_e)$ collecté sur l'électrode d'entrée en l'absence de spectre



8.b – determination du potentiel plasma V_p et de la temperature

FIG.VI 8 DETERMINATION DU POTENTIEL PLASMA A PARTIR DE LA CARACTERIS-TIQUE D'ENTREE DE L'ANALYSEUR.

et de déterminer l'origine des potentiels sur la grille d'analyse. Une détermination du potentiel plasma est ainsi faite. L'allure de la déformation du courant $J_o^{(2)}$ est montrée sur la figure VI.9, pour une onde de 100 MHz et à 38 cm de distance. Rappelons que $J_o^{(2)}$ varie en fonction de la puissance de l'onde mais qu'il se sature pour une puissance correspondant au potentiel de piégeage, et que l'amplitude maximum de la déformation augmente avec la distance. La grande largeur de la déformation (supérieure à la largeur théorique $\frac{k_i}{k_r}$) est due au fait que l'onde n'est pas rigoureusement monochromatique. Cette mesure, faite pour différentes fréquences ω de l'onde, donne des valeurs précises au volt près qui peuvent entres elles présenter un écart de 5 volts.

VI.4-3 Conclusion

Les deux méthodes utilisées donnent des valeurs du potentiel de plasma variant entre +10 et +15 Volts avec une précision de l'ordre du volt. La confrontation des résultats nous oblige à utiliser une indétermination de 5 Volts sur les mesures.

VI.5 DENSITE D'ENERGIE CINETIQUE D'UN PLASMA

La connaissance de cette quantité sera nécessaire pour évaluer le paramètre de turbulence α. Rappelons que $\alpha = \frac{\xi_f}{\xi_c}$ est le rapport des densités d'énergies associée aux fluctuations des ondes ξ_f, et cinétique ξ_c.

VI.5-1 Détermination de ξ_c à partir de la température T_e

$$\xi_c = \frac{1}{2} n_o k_B T_e$$

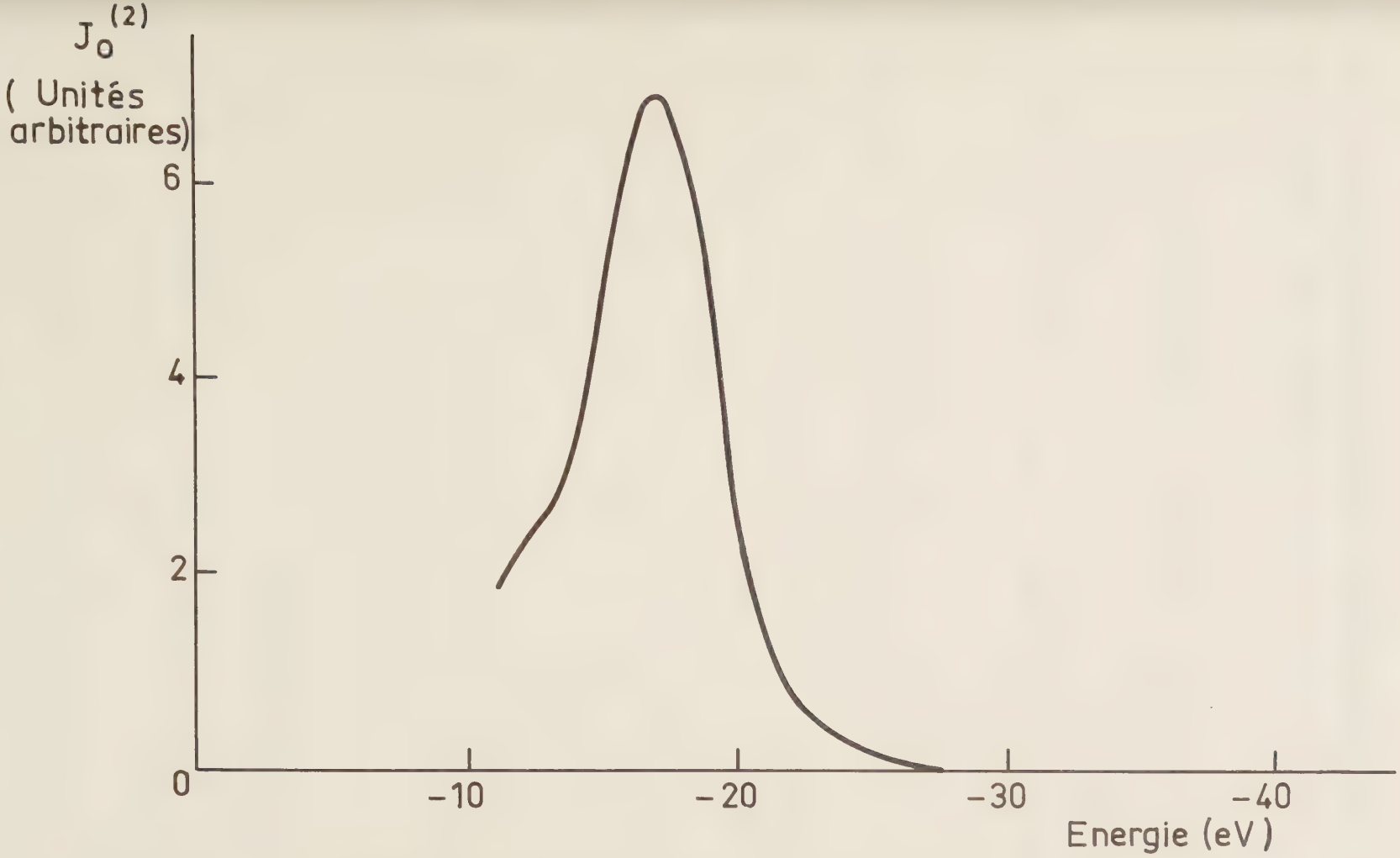


FIG. VI . 9 . COURANT COHERENT $J_o^{(2)}$ DÛ A UNE ONDE

argon $n = 4 . 10^8$ el/cm^3 $T_e = 2$ eV $B_o = 1500$ Gauss

$F = 100$ MHz $k_r = 255\ m^{-1}$ $k_i^L = 13\ m^{-1}$ $\frac{\Delta k_r}{k_r} = 9\%$

$Z = 38$ cm

où k_B est la constante de Boltzmann = $1,37.10^{-23}$ Joule/K. Pour un plasma de 10^{14} el/m^3, $T_e \simeq 3$ eV, le calcul donne $\xi_c = 2,4\ 10^{-5}$ Joule/m^3

VI.5-2 Calcul de ξ_c à partir de la fonction de distribution

$$\xi_c = \int_0^\infty \frac{1}{2} m_e v^2 f(v)\, dv.$$

en admettant une fonction de distribution électronique maxwellienne telle que $\int_0^\infty F_o(v)\, dv = n_o$, soit :

$$F_o(v) = \frac{\sqrt{2}\, n_o}{\sqrt{\pi}\, v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \text{ avec } n_o = \frac{1}{S}\int_o^R 2\pi r\, dr\, n(r)$$

$$\boxed{\xi_c = \frac{m_e\, n_o\, v_{th}^2}{2}}$$

Pour le plasma de 10^{14} el/m^3, $v_{th} = 7,6\ 10^5$ m/s,

$\xi_c = 2,4\ 10^{-5}$ Joule/m^3

Pour un plasma de 1 m de long, de rayon R = $0,5\ 10^{-2}$ m, l'énergie cinétique correspondante $E_c = S \times \mathcal{L} \times \xi_c$ est égale à 2.10^{-9} Joule.

VI.6 CALCUL DU FLUX D'ENERGIE CINETIQUE.

Le flux d'énergie cinétique est défini de la façon suivante:

$$\text{Flux} = S\int_o^\infty \frac{1}{2} m\, v^3\, f(v)\, dv.$$

Pour la fonction de distribution maxwellienne limitée aux vitesses positives déjà introduite:

$$\text{Flux} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\ S\, m_e\, n_o\, v_{th}^3$$

Pour le plasma de $n_o = 10^{14}$ el/m^3, $v_{th} = 7,6\ 10^5$ m/s,

$R = 0{,}5\ 10^{-2}$ m, le flux total est égal à 1,2 mW. Cette valeur croit avec R et n_o. Pour un plasma $n_o = 5.10^4$ el/m^3 et $R = 10^{-2}$ m, le flux total est égal à 24 mW.

Le flux d'énergie associé au spectre d'ondes devra donc dans tous les cas être très inférieur pour respecter la condition de faible turbulence.

VI.7 CARACTERISTIQUES DU PLASMA D'E.O.S.

On a pu grouper en un tableau les principales caractéristiques des plasmas utilisés.

Longueur utile de la colonne	64 cm
rayon du plasma R	0,5 à 1,5 cm
champ magnétique B_o	1300 à 2000 Gauss
pression de neutre	quelques 10^{-6} Torr
densité électronique moyenne n_o	10^7 à 10^9 el/cm^3
fréquence plasma électronique ω_{pe}	50 à 150 MHz
température électronique T_e	1,5 à 5 eV
longueur de Debye λ_D	100 à 500µ
rayon de Larmor des électrons r_{Le}	30 à 50µ
fréquence cyclotronique électronique ω_{ce}	de l'ordre de 5 GHz
fréquence cyclotronique ionique ω_{ci}	≈500 kHz
fréquence plasma ionique ω_{pi}	environ 0,5 MHz
densité d'énergie cinétique ξ_c	quelques 10^{-5} Joule/m^3

VI.8 DISCUSSION DES HYPOTHESES DU MODELE THEORIQUE.

Nous avons utilisé plusieurs hypothèses dans la partie théorique de ce mémoire. Certaines ne concernent que les caractéristiques du plasma : plasma non collisionnel, modèle unidimensionnel, géométrie finie radialement et infinie longitudinalement. Compte tenu des valeurs données dans le tableau ci-dessus, nous pouvons déjà examiner la validité de ces hypothèses.

VI.8-1 Influence des collisions.

Le calcul des libres parcours moyens pour les collisions électrons-neutre λ_{en} et électrons-ions λ_{ei} a été fait dans le cas d'un plasma d'argon de 10^8 el/cm^3, de température 2 eV, avec une pression en fonctionnement de 2.10^{-6} Torr. λ_{en} et λ_{ei} sont très supérieures à 10^3 m et 10^2 m, donc très supérieures aux dimensions du plasma. De plus les fréquences de collisions ν_{ci}, ν_{ee} sont très inférieures à la fréquence plasma électronique.

L'hypothèse d'un plasma non collisionnel est parfaitement justifiée.

VI.8-2 Hypothèse d'un modèle unidimensionnel.

Aux valeurs du champ magnétique utilisées correspondent des fréquences cyclotroniques électroniques très supérieures aux fréquences de propagation des ondes. Les mouvements transverses des électrons peuvent être négligés, puisque le rayon de giration des électrons $r_{Le} = \frac{m_e v_\perp}{q B_o} \approx \frac{m_e v_{th}}{q B_o}$ est de 37 µ pour un champ de 1500 Gauss et une vitesse thermique de 10^5 m/s. Les équations du milieu sont celles d'un modèle unidimensionnel.

VI.8-3 Influence du gradient longitudinal de densité et du profil radial de densité.

Le plasma présente un gradient longitudinal de densité inférieur à 20% sur toute la longueur de la colonne, c'est-à-dire sur L = 60 cm. Pour des ondes de longueur d'onde $\lambda << L$, c'est-à-dire pour des ondes de fréquences supérieures à 30 MHz, le plasma peut-être considéré comme infini longitudinalement. Si nous supposons que la densité varie comme $n = n_o \exp\left(-\frac{z}{l}\right)$, la longueur caractéristique du gradient l, telle que $\frac{1}{l} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}$, doit-être très supérieure au k_r de l'onde.

La présence d'un profil transversal de densité, qui rend compte de l'inhomogénéité du plasma radialement, fait que la courbe de dispersion des ondes, obtenue expérimentalement , n'est pas celle d'un plasma infini. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser dans les calculs les termes en géométrie limitée cylindrique. En général, seuls les modes de nombre azimuthal m = o, et radial $\mu = 1$ sont excités (μ représente le nombre de zéros de l'amplitude des ondes le long d'un rayon).

ANNEXE VI.

A. POTENTIEL SUR L'AXE D'UN ANNEAU CHARGE D'UNE DENSITE ELECTRIQUE σ.

En l'absence de grille sur les électrodes, calculons la valeur du potentiel V_{12} en un point P de l'axe d'un anneau au centre duquel existe le potentiel V_o. (Fig.VI-A1)

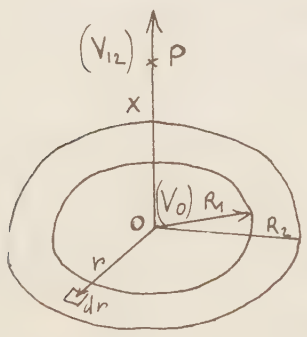


Fig VI A 1

le potentiel dV_{12} créé en P par un élément de surface 2π rdr est égal à :

$$dV_{12} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o} \quad \frac{2\pi\, rdr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

le potentiel créé par l'anneau est tel que $V_{12} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}\right]$ et V_o au centre du trou est tel que :

$$V_o = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(R_2 - R_1)$$

Pour $R_2 = 10\ R_1$, x = 4 mm et R_1 = 1,5 mm, on trouve :

$$\frac{V_{12}}{V_o} = 80\%$$

en l'absence de grille, le potentiel au centre du trou de l'électrode suivante, distante de 4 mm, est grandement influencé par les électrodes environnantes.

B. EFFET DE PENETRATION DE CHAMP A TRAVERS UNE GRILLE

Pour limiter les phénomènes d'influence, une grille est donc juxtaposée au trou d'une électrode quelconque. Regardons l'ordre de grandeur du potentiel supplémentaire ΔV_a créé par exemple au centre d'un trou de la grille d'analyse par une électrode adjacente portée au potentiel V. Sa valeur est donnée par la formule /13/

$$\Delta V_a = - \frac{\text{Log}\left(\sin \frac{\pi c}{d}\right)}{\frac{\pi e}{d} - \text{Log}\left(2 \sin \frac{\pi c}{d}\right)} \left[V_a - \frac{1}{2} V\right]$$

e : distance entre les grilles = 4 mm

c : $\frac{1}{2}$ largeur du barreau de grille = 5 µ

d : distance entre les barreaux de grille : 190 µ

Si on prend comme potentiel V, le potentiel de l'électrode d'arrêt des ions : V = 60 Volts.

$$\frac{\Delta V_a}{V_a} = 0{,}037 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V}{V_a}\right)$$

Pour V_a = 10 Volts, $\frac{\Delta V_a}{V_a} = 7{,}5\%$ $\Delta V_a = - 0{,}75$ V

Cette variation est négligeable.

CHAPITRE VI.

BIBLIOGRAPHIE.

/1/ M.PERULLI, thèse, Rapport CEA-R-3639 (1968)

/2/ J.OLIVAIN, thèse, Rapport EUR-CEA-FC-602 (1971)

/3/ F.PERCEVAL, thèse 3è cycle, Rapport CEA-R-3740 (1968)

/4/ A. QUEMENEUR, thèse 3è cycle, Rapport EUR-CEA-FC-529 (1969)

/5/ M.GUILLEMOT, thèse, Rapport EUR-CEA-FC-639 (1972)

/6/ G.MATTHIEUSSENT, thèse, Orsay série A n°946 (1972)

/7/ M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, F.PERCEVAL and J.SCHARER, Phys. Fluids 14, 952 (1971)

/8/ M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, F.PERCEVAL, A.QUEMENEUR, 3rd international conference on quiescent plasmas, Risö, proceedings p.304 (1971)

/9/ F.GERVAIS, M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, A.QUEMENEUR, 2nd international conference on gas discharges, LONDON, proceedings p.260 (1972)

/10/ A.QUEMENEUR, thèse (à paraître)

/11/ P.DESCHAMPS ninth international conference on phenomena in ionized gases, Bucarest, 5-1-18, (1969)

/12/ J.H.MALMBERG, T.H.JENSEN and T.M.O'NEIL
Novosibirsk conference, CN-24/E8 (1968)

/13/ S.LARIGALDIE, thèse de 3è cycle, Orsay (1970)

CHAPITRE VII

MESURE DES PARAMETRES LIES AUX ONDES ;
CAS DU SPECTRE DE BRUIT.

DISCUSSION DES HYPOTHESES.

Quand une onde se propage dans le plasma, il est nécessaire de connaître sa fréquence, sa longueur d'onde, son amplitude et son profil de potentiel. La connaissance de la fréquence et du nombre d'onde k_r permet de tracer la relation de dispersion du plasma considéré. Une évaluation de l'amplitude est indispensable si l'on veut comparer quantitativement les résultats théoriques et expérimentaux. L'étude des variations d'amplitude le long de la colonne permet une mesure du coefficient d'amortissement ou de croissance de l'onde. La mesure du profil de potentiel conduit à choisir un profil théorique approprié.

La connaissance des mêmes paramètres est nécessaire quand un spectre large bande d'ondes monochromatiques est excité dans le milieu.

Les hypothèses du calcul théorique concernant les ondes peuvent ainsi être discutées.

VII.1 MESURE DE LA FREQUENCE D'UNE ONDE.

La fréquence des ondes émises est lue directement sur le générateur. La fréquence des ondes reçues est déterminée en envoyant le signal collecté par une sonde de Langmuir sur un analyseur de spectre étalonné en fréquences. Les fréquences des ondes émises sont situées entre 30 et 150 MHz, le spectre de bruit est excité entre 68 et 93 MHz. La fréquence du plasma est égale à 90 MHz pour un plasma de densité 10^8 électrons par cm^3. Les ondes émises ne sont pas rigoureusement monochromatiques. Il existe toujours une dispersion en fréquence due au manque de stabilité du générateur et à l'existence d'une micro-turbulence dans le plasma.

VII.2 DETERMINATION DE LA LONGUEUR D'ONDE.

La plupart des ondes excitées dans la colonne sont des ondes de mode m = o, [1], caractérisées par leur nombre d'onde longitudinal $k_r + i\, k_i$. La partie réelle du nombre d'onde est obtenue à partir d'une méthode d'intercorrélation [2], [3]. Deux sondes, l'une fixe, l'autre mobile, servent d'émetteur et de récepteur. La sonde fixe est reliée à un générateur de fréquence (30 - 150 MHz). La sonde réceptrice collecte un signal qui est amplifié et mélangé au signal provenant de la sonde fixe à l'aide d'un cristal mélangeur. Pour améliorer le rapport signal/bruit, on utilise souvent une méthode de détection synchrone : l'onde

excitée est modulée en amplitude à basse fréquence (entre 10 et 100 kHz) ; le signal résultant est envoyé sur un détecteur synchrone auquel est injectée en référence la fréquence de modulation, et qui fonctionne en interféromètre. (Fig. VII.1-a).

Le signal d'intercorrélation obtenu en déplaçant la sonde mobile permet une mesure de la longueur d'onde, donc de k_r. (Fig.VII.1-b). Dans les cas où l'on s'attend à voir apparaître plusieurs nombres d'onde discrets, (Fig.VII.1-c), le signal d'intercorrélation est mémorisé et traité par ordinateur pour obtenir ses composantes de Fourier [3, 4].

L'amplitude des ondes dans le plasma, du fait de la longueur de corrélation finie, ne peut-être mesurée avec ce dispositif.

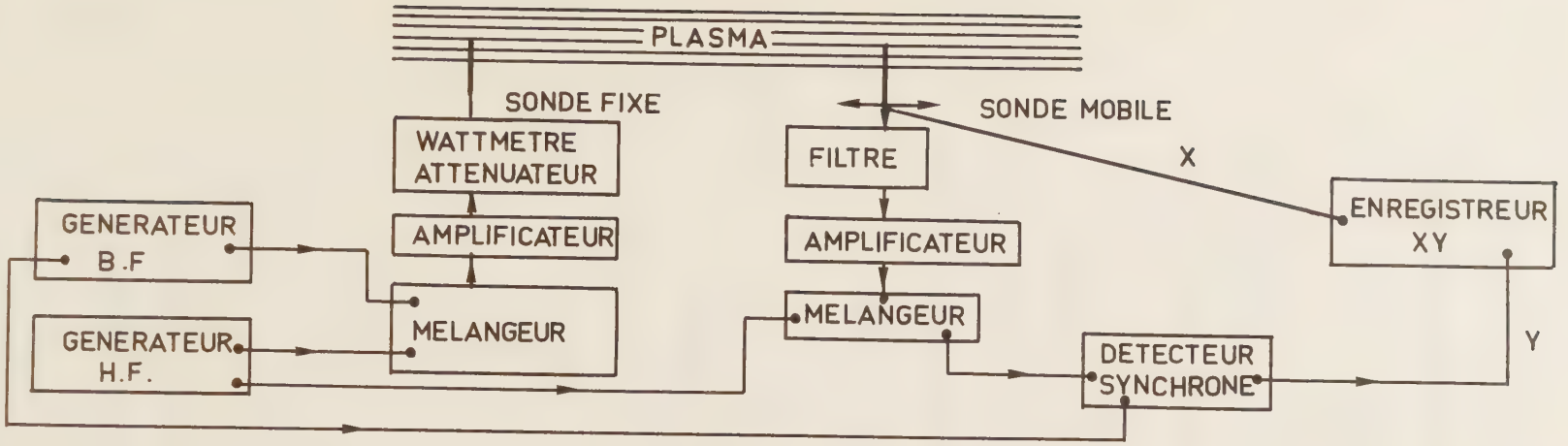
Les longueurs d'onde sont de l'ordre de 2 à 40 cm, inférieures à la longueur utile de l'expérience. La longueur de Debye dans le plasma est de quelques centaines de microns.

VII.3 COURBE DE DISPERSION.

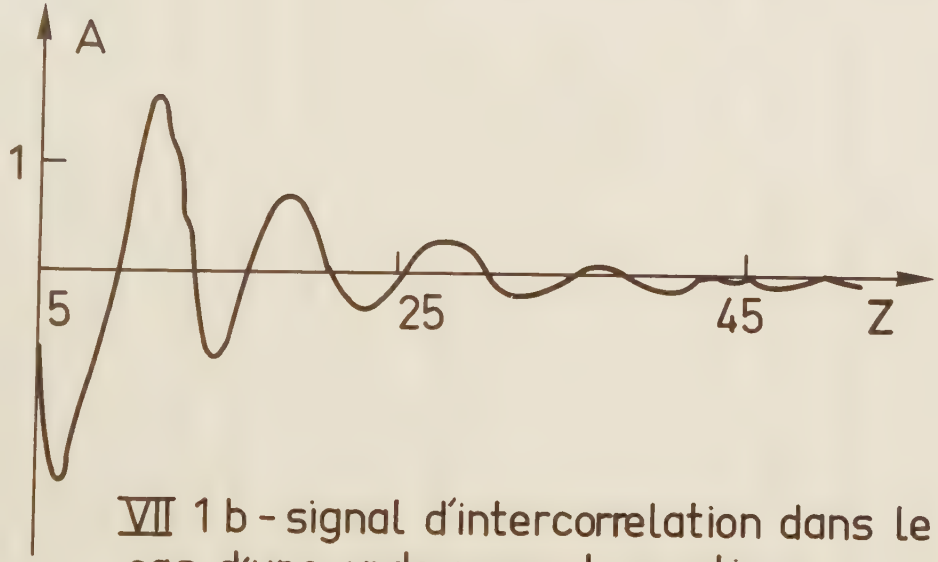
On a tracé sur la figure VII.2 la courbe expérimentale $\omega = f(k_r)$; on voit que cette courbe coïncide très bien avec la courbe analytique donnant la relation de dispersion avec température, en géométrie finie radialement :

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 K^2 R^2}{1 + K^2 R^2} + 3 K^2 v_{th}^2 \qquad \text{(VII.1)}$$

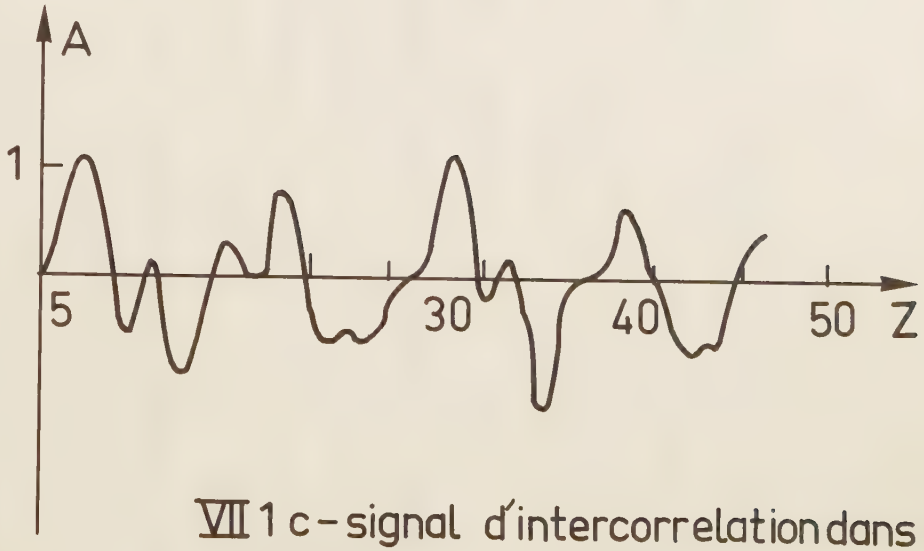
En utilisant les valeurs expérimentales (ω , k_r), on peut ainsi calculer numériquement les valeurs correspondantes de R,



VII 1 a–dispositif de mesure des nombres d'ondes



VII 1 b - signal d'intercorrelation dans le cas d'une onde monochromatique de 70 MHz
B_0=1400 G ; n_0=1,8.10^8 el/cm^3; Te=1,9 eV



VII 1 c - signal d'intercorrelation dans le cas d'une onde monochromatique de 50 MHz
B_0=2200 G ; n_0= 4 . 10^8 el/cm^3

FIG. VII 1-METHODE DE MESURE DES NOMBRES D'ONDES

ω_p, v_{th}, v_g, v_φ qui font passer au mieux la courbe théorique par les points expérimentaux. Les valeurs ainsi trouvées sont du même ordre de grandeur que celles calculées à partir des mesures de densité et de température du plasma, c'est à dire : R compris entre 0,5 et 1,5 cm ; ω_p compris entre 314 et 628 MHz ; v_{th} de l'ordre de 10^6 m/s. La vitesse thermique est toujours inférieure aux vitesses de groupe et de phase qui se situent dans un domaine compris entre 10^6 et 10^7 ms.

Sur la figure VII.2, on a représenté les variations de v_g et v_φ (et des énergies correspondantes) avec la fréquence, calculées à partir de la relation (VII.1).

Nous verrons au chapitre IX comment le spectre de turbulence peut modifier de façon notable la courbe de dispersion. Nous rappellerons alors comment la courbe de dispersion peut-être modifiée du fait des fluctuations temporelles de densité.

VII.4 MESURE DE L'AMPLITUDE DES ONDES

VII.4-1 Profil radial de potentiel

Le profil de potentiel $\emptyset$ (r) est obtenu en déplaçant radialement une sonde capacitive dans le plasma. Il varie avec la fréquence /5/ et a l'allure réprésentée sur la figure VII.3. Cette allure justifie l'emploi d'une fonction de Bessel $J_o(2,4r)$ pour Ψ (r) dans les calculs théoriques.

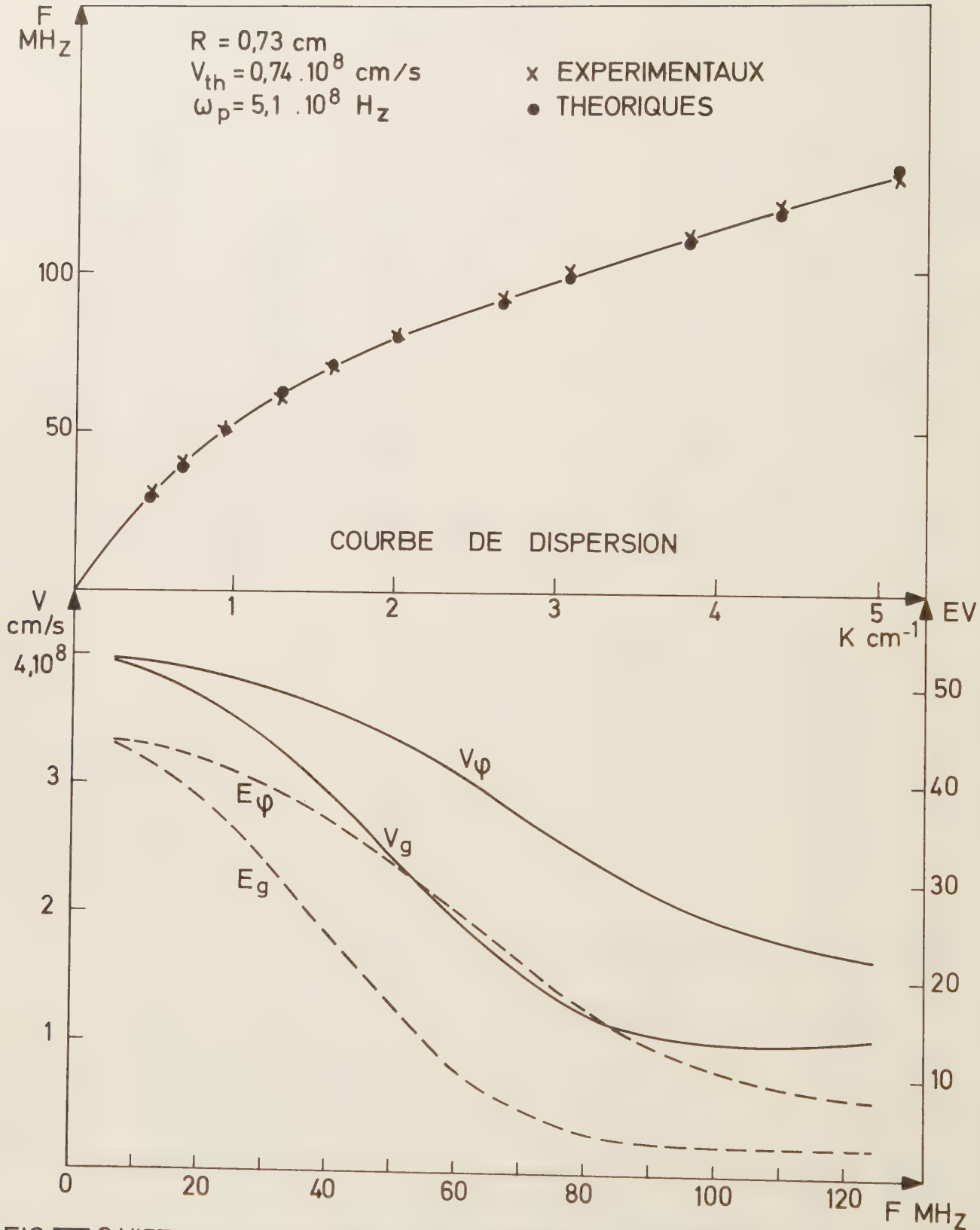


FIG.VII.2.VITESSES DE PHASE, DE GROUPE ET ENERGIES CORRESPONDANTES CALCULEES A PARTIR DE LA COURBE DE DISPERSION

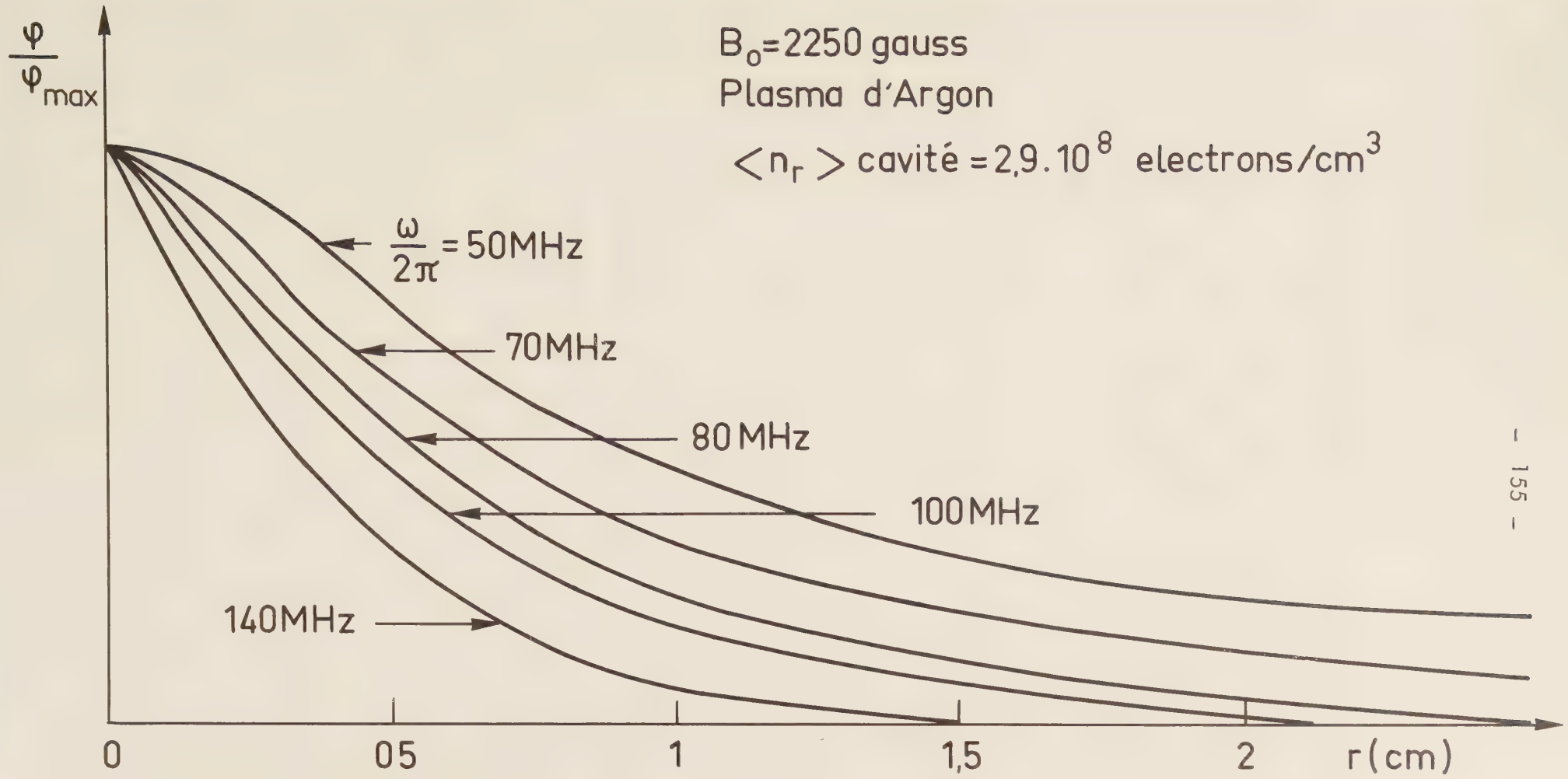


FIG. VII 3. PROFILS DE POTENTIEL MESURES POUR DIFFERENTES FREQUENCES DANS LE CAS D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE.
(D'après: QUEMENEUR – EUR-CEA-FC 529)

VII.4-2 Mesure du coefficient de couplage des sondes

La puissance injectée dans le plasma est mesurée à l'aide d'un wattmètre. Pour connaître la puissance effectivement présente dans le plasma, il est nécessaire d'évaluer le coefficient de couplage β_c de la sonde utilisée. Le coefficient de couplage d'une antenne est très difficile à définir. Une sonde de Langmuir utilisée soit comme récepteur, soit comme émetteur, perturbe le plasma, et le coefficient de couplage est différent en amont et en aval [6], [7]. Il varie bien sûr avec les dimensions et la forme de la sonde, très peu avec la fréquence de l'onde. On mesure la puissance à l'entrée de la sonde émettrice et la puissance à la sortie de la sonde réceptrice en tenant compte de l'amortissement naturel des ondes émises. C'est donc la somme des coefficients de couplage à l'émission et à la réception qui est mesurée. Mais on suppose que la loi de réciprocité est valable et que les coefficients de transmission et de réception sont les mêmes. En utilisant une méthode dite "à trois sondes" et déjà décrite [7], on émet et on reçoit successivement sur trois sondes une certaine fréquence. On en déduit un coefficient de couplage pour les deux sondes émettrices fixes identiques qui varie entre 20 et 23 db. Celui de la sonde réceptrice, mobile, de forme différente, prend des valeurs entre 27 et 30 db.

Le coefficient de couplage est connu avec une incertitude absolue de 2 db.

La puissance P dans le plasma est telle que :

$$P = \frac{P \text{ injectée}}{\beta_c} \qquad \text{(VII.2)}$$

Par exemple, si on injecte une onde de 100 mW dans le plasma avec une sonde dont le coefficient de couplage est 23 db, il lui correspond une puissance P de 0,5 mW. A cette puissance de l'onde correspond une certaine valeur du potentiel oscillant que nous allons essayer de déterminer.

VII.5 MESURE DU POTENTIEL OSCILLANT D'UNE ONDE

Pour relier P au potentiel oscillant, nous avons déjà utilisé une sonde capacitive [8] ; nous avons aussi mesuré la longueur de piégeage de particules dans le puits d'une onde de grande amplitude [9, 10, 11, 12], et nous en déduisons une valeur du potentiel de l'onde.

Une autre méthode utilise la densité d'énergie de l'onde $\xi_f(r)$ moyennée sur le temps.

La conservation du flux d'énergie le long de la colonne de plasma permet d'écrire :

$$(VII.3)\quad P = 2\pi v_g \int_0^R r\,dr\ \xi_f(r)$$

où v_g est la vitesse de groupe de l'onde considérée, et R le rayon du plasma. La densité d'énergie moyennée sur le temps est calculée [13], à partir de la relation :

$$(VII.4)\quad \xi_f(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\langle \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\chi_r(r)\,\omega\right) E_r^2 + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\chi_z(r)\omega\right) E_z^2 \right\rangle_t$$

E_r et E_z, χ_r et χ_z sont les composantes radiales et longitudinales du champ électrique et de la constante diélectrique réduite du

milieu.

Les composantes du champ électrique se calculent à partir du potentiel :

(VII.5) $\phi\ (r,\ z = o) = \phi_o\ \widehat{\phi\ (r)}\ e^{j\,\omega t} + C.C.$

où ϕ_o est le potentiel en r = o, $\widehat{\phi\ (r)}$ le profil radial sans dimension. $\widehat{\phi(r)}$ n'est autre que la fonction $\Psi\ (r)$ normalisée dans le cas où N(r) = 1

$$\widehat{\phi(r)} < 1 \quad \text{pour} \quad r < R \quad \text{et} \quad \widehat{\phi(r)} = 1 \quad \text{pour} \quad r = 0$$

(VII.6) $\phi\ (r,\ z) = \phi_o\ \widehat{\phi(r)}\ e^{j(\omega t - k_r z)}\ e^{-k_i z} + C.C.$

La densité d'énergie s'écrit :

$$(VII.7) \quad \xi_f(r) = \frac{\varepsilon_o}{4}\left[\ \left|\frac{\partial\widehat{\phi(r)}}{\partial r}\right|^2 + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\chi_z\,\omega\,k^2\right)\left|\widehat{\phi(r)}\right|^2\right]\phi_o^2\,\exp\left(-2k_i z\right)$$

Pour poursuivre le calcul, il est nécessaire d'exprimer $\widehat{\phi\ (r)}$ qui satisfait à l'équation différentielle du chapitre II :

$$(VII.8) \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\widehat{\phi(r)}}{\partial r}\right) - k^2\,\widehat{\phi(r)} - k^2\,N(r)\left[\varepsilon_\infty(k,\omega) - 1\right]\,\widehat{\phi(r)} = 0$$

Compte tenu de la relation (II.12), telle que :

$$\frac{1}{S}\int_o^R 2\pi r\,dr\,N(r)\,\Psi(r)\,\Psi^*(r) = 1$$

du fait que :

$$(VII.9) \quad \int_o^R \left|\frac{\partial\widehat{\phi(r)}}{\partial r}\right|^2 r\,dr = \int_o^R r\,dr\,\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\,\frac{\partial\phi^*(r)}{\partial r}$$

et en introduisant $\varepsilon_{LR}\,(k,\omega)$ définie au chapitre II, la puissance P de l'onde s'exprime à partir du potentiel ϕ_o par la formule :

$$(VII.10) \quad P = \frac{\varepsilon_o}{2}\,v_g\,k^2\,\phi_o^2\,e^{-2k_i z}\int_o^R 2\pi\,r\,dr\left|\phi(r)\right|^2 N(r)\,\omega\,\frac{\partial\,\varepsilon_{LR}(k,\omega)}{\partial\omega}$$

Soit :

$$\boxed{P = \frac{\varepsilon_o}{2}\,S\,v_g\,k^2\,\phi_o^2\,e^{-2k_i z}\,\omega\,\frac{\partial\varepsilon_{LR}}{\partial\omega}}$$

$\widehat{\phi(r)}$ a l'allure représentée sur la figure VII.3. Un exemple de

profil de densité $n(r) = n_o\, N(r)$ est donné sur la figure VI.3 k_i^L est déduit le plus souvent des mesures d'amplitude ; nous donnerons plus loin une autre méthode de calcul du coefficient d'amortissement à partir des résultats expérimentaux. R, p et v_g sont déduits de la relation de dispersion expérimentale. Dans le cas de la relation de dispersion (VII.1) définie en VII.3:

$$\omega \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \omega} = \frac{2\omega^2}{\omega^2 - 3k^2 v_{th}^2}$$

Dans le cas d'une relation droite définie au chapitre II, (II.37) :

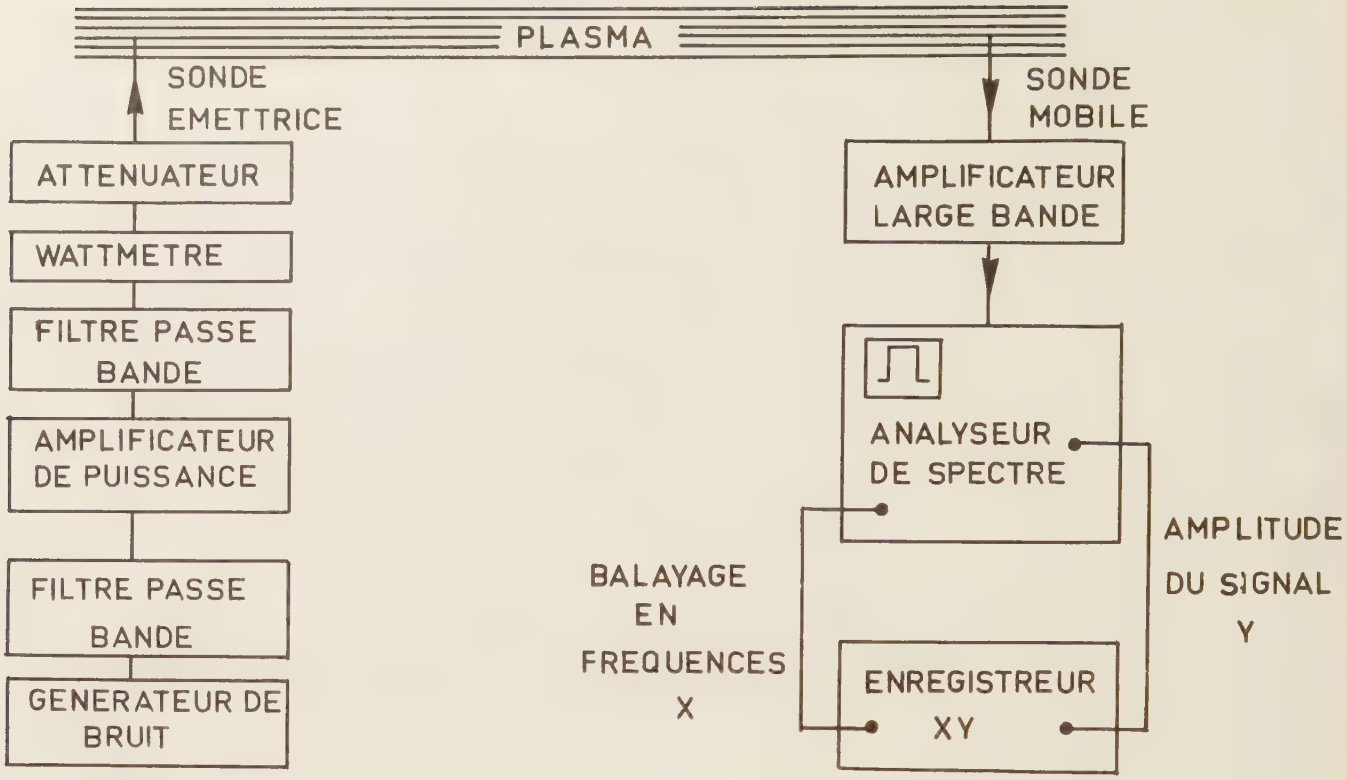
$$\omega \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \omega} = 1$$

Nous trouvons ainsi que l'amplitude ϕ_o au niveau z = 0 de la sonde émettrice est en général inférieure à 1 Volt. Par exemple pour une puissance injectée de 3 mW, les potentiels ϕ_o, qui diminuent un peu avec la fréquence, sont de l'ordre de 0,07 Volt, et sont proportionnels à la racine carrée de la puissance injectée.

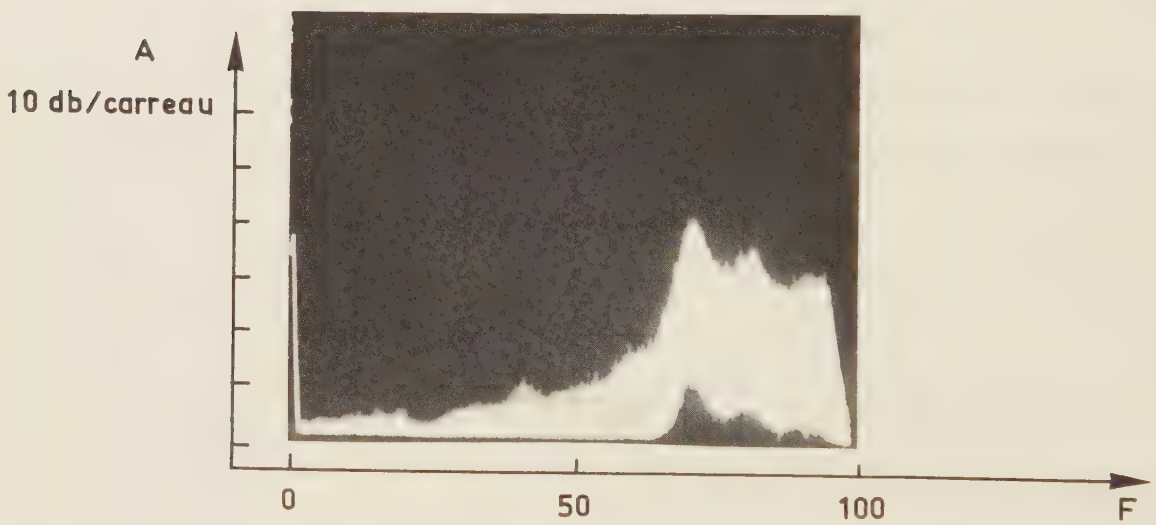
VII.6 CAS DU SPECTRE DE BRUIT

VII.6-1 Production du spectre d'ondes.

Un spectre d'ondes, de fréquences comprises entre 68 et 93 MHz (largeur à 3 db) est injecté à l'extrémité de la colonne de plasma ; il est obtenu en amplifiant et en filtrant le spectre émis par un générateur de bruit (Fig.VII.4-a). Les fronts de montée sont assez raides (environ 6 db par MHz). L'amplitude de chacun des modes du spectre de turbulence n'est constante qu'à ± 2 db. Cette variation d'amplitude est due au générateur de bruit, à l'absence d'écrêteur après le filtre, et aussi à la petite variation



4 a. production du spectre



4b. allure du spectre initial 68–93 MHZ
Z = 5 cm

FIG. VII 4 PRODUCTION ET ALLURE DU SPECTRE D'ONDES

du coefficient de couplage des composantes des différentes fréquences. Le spectre de turbulence ainsi injecté dans le plasma à l'aide d'une sonde émettrice à un niveau supérieur au bruit thermique d'au moins 25 db. A la réception, le signal peut être envoyé sur un analyseur de spectre. Sur la figure VII.4-b, l'état du spectre à la distance z = 5 cm est ainsi visualisé.

VII.6-2 Calcul de l'amplitude par unité de fréquence du spectre

Le calcul pour une onde reste valable à condition d'introduire la notion de puissance P_ω par unité de fréquence dans le spectre ; la puissance totale dans le spectre, est telle que :

(VII.11) $$P_T = \int_{\text{spectre}} P_\omega \, d\omega$$

La puissance moyenne par unité de fréquence dans le spectre s'écrit (pour des modes m = o) :

(VII.12) $$\boxed{P_\omega = \frac{\varepsilon_o}{2} K^2 v_g \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega \varepsilon_{LR}) \int_o^R 2\pi r\, dr\, N(r) \left\langle \phi\, \phi^*(r,z,\omega) \right\rangle_t}$$

$$\left\langle \phi\, \phi^*(r,z,\omega) \right\rangle_t = \frac{\phi^*(r,z,\omega)\, \phi(r,z,\omega)}{T}$$

$$= \left\langle \varphi_K(z,\omega)\, \varphi_K^*(z,\omega) \right\rangle \psi_K(r)\, \psi_K^*(r)$$

Rappelons que $\phi(z,\omega) = \int d\omega\, e^{-i\,\omega t}\, \phi(z,t)$

Dans ces conditions P_ω s'écrit :

(VII.13) $$P_\omega = \frac{\varepsilon_o}{2} K^2 v_g\, \omega \frac{\partial \varepsilon_{LR}}{\partial \omega} \left\langle \varphi_K \varphi_K^*(z,\omega) \right\rangle \int_o^R 2\pi r\, dr\, N(r) \psi_K(r) \psi_K^*(r)$$

Pour poursuivre le calcul, plusieurs hypothèses sont utilisées.

a) le profil de densité est plat. N(r) = 1 pour $0 \leq r \leq R$ et N(r) = o pour r > R.

b) le calcul est fait dans le cas d'un spectre idéal rectangulaire d'amplitude constante ϕ_0.

alors $\langle \varphi_k \varphi_k^*(z,\omega) \rangle = \langle \phi_0^2 \rangle$ s'exprimant en Volts^2/Hz

c) les fonctions propres $\Psi(r)$ correspondant aux profils de potentiel $\hat{\phi}(r)$ sont telles que :

$$\frac{1}{S}\int_0^R 2\pi r\, dr\, \Psi_k(r)\, \Psi_k^*(r) = 1$$

d) la relation de dispersion choisie est celle de la relation (II.37) qui donne $\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 1$

Compte tenu de toutes ces hypothèses, on peut écrire :

(VII.13) $$\boxed{P_\omega = \frac{\varepsilon_0}{2} k^2 v_g S \phi_0^2}$$

La puissance totale P_T dans le spectre est alors égale à

(VII.14) $$\boxed{P_T = P_\omega \Delta\omega = \frac{\varepsilon_0}{2} k^2 v_g S \phi_0^2 \Delta\omega}$$

C'est ce résultat très simple qui est utilisé pour évaluer ϕ_0^2 en fonction de la puissance injectée égale à $\beta_c P_T$. L'évaluation de ϕ_0^2 se fait à partir d'un cas expérimental où v_g, k, $\Delta\omega$ et R sont connus. La confrontation de plusieurs résultats permet de faire une estimation ; nous prendrons généralement :

$\phi_{0\sim} \sim$ 0,08 mV x Hz$^{-\frac{1}{2}}$ pour une puissance injectée de 1 W soit 5 mW dans le plasma, c'est-à-dire inférieure à 10^{-4} V par Hertz$^{\frac{1}{2}}$

VII.7 MESURE DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT OU DE CROISSANCE DES ONDES EXISTANT DANS LE MILIEU

VII.7-1 A partir de l'amplitude des ondes

Une sonde mobile longitudinalement permet d'explorer l'amplitude de l'onde suivant l'espace, et de déterminer son

amortissement ou sa croissance, en utilisant soit une détection linéaire (Fig.VII.5) ou une détection logarithmique à la sortie d'un analyseur de spectre, soit une détection quadratique à l'aide d'un cristal détecteur.

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) l'onde se propage seule et son amplitude décroit exponentiellement avec la distance ; il est facile de déterminer son coefficient d'amortissement Landau linéaire k_i^L (Fig.VII.6)

b) l'onde se propage en présence du spectre de turbulence

Les courbes donnant les variations de l'amplitude (ou du carré de l'amplitude) de l'onde en fonction de la distance sont souvent assez différentes de vraies exponentielles, mais elles peuvent permettre une détermination du taux de croissance ou d'amortissement k_i^{NL} de l'onde.

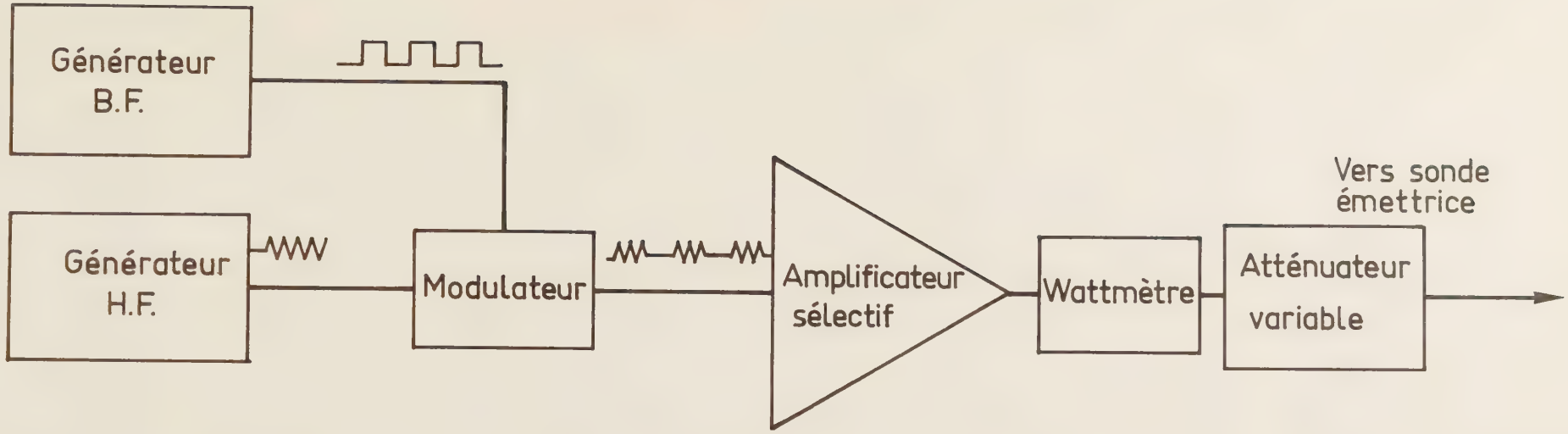
Pour une détection quadratique (Fig.VII.7), nous pouvons admettre une décroissance approchée de la forme $A^2 = A_o^2 \exp -2k_i^{NL} z$ (ou une croissance). Pour deux valeurs de l'amplitude A_1 et A_2 correspondant aux positions z_1 et z_2 de la sonde mobile longitudinalement, nous pouvons écrire :

$$(VII.15) \quad | k_i^{NL} | = - \frac{1}{2(z_2 - z_1)} \text{Loge}\left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

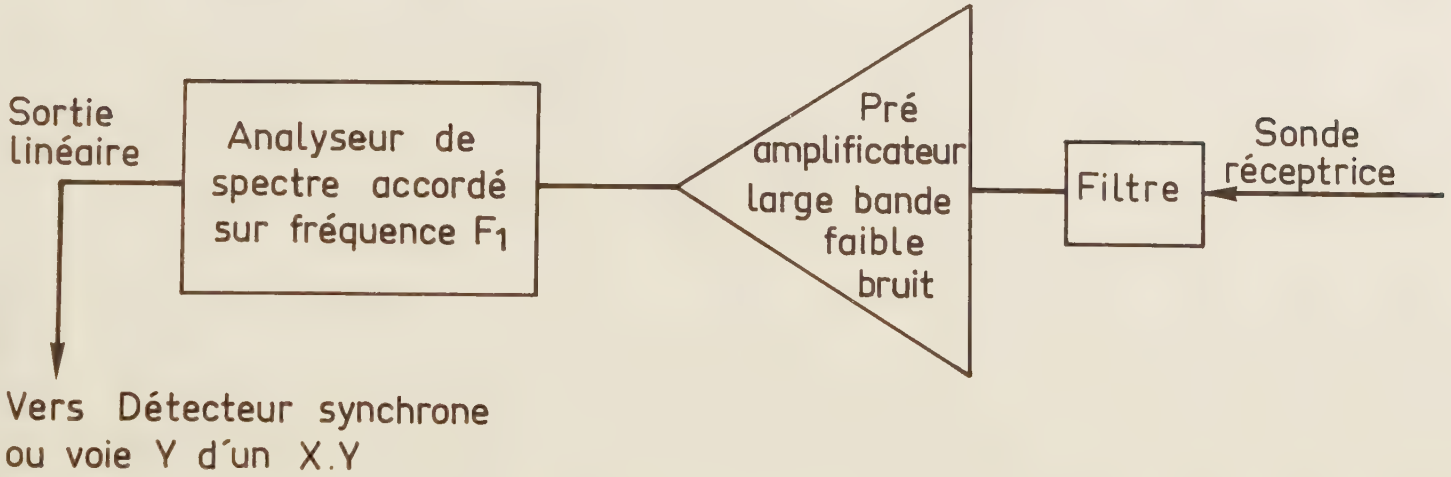
Le résultat est porté sur la figure VII.7.

VII.7-2 La partie imaginaire du nombre d'onde peut être calculée comme au chapitre II, à partir de la formule

$$(VII.16) \quad K_i^L = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{v_g} \frac{\mathcal{R}e\left[\frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{dF_o}{dv}\right)_{v=\frac{\omega}{\kappa}}\right]}{\mathcal{R}e\left[\frac{\partial \varepsilon(\kappa,\omega)}{\partial \omega}\right]}$$



a) Génération et modulation d'une fréquence



b) Reception et détection linéaire d'une fréquence

FIG. VII 5 MESURE DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT OU DE CROISSANCE D'UNE ONDE

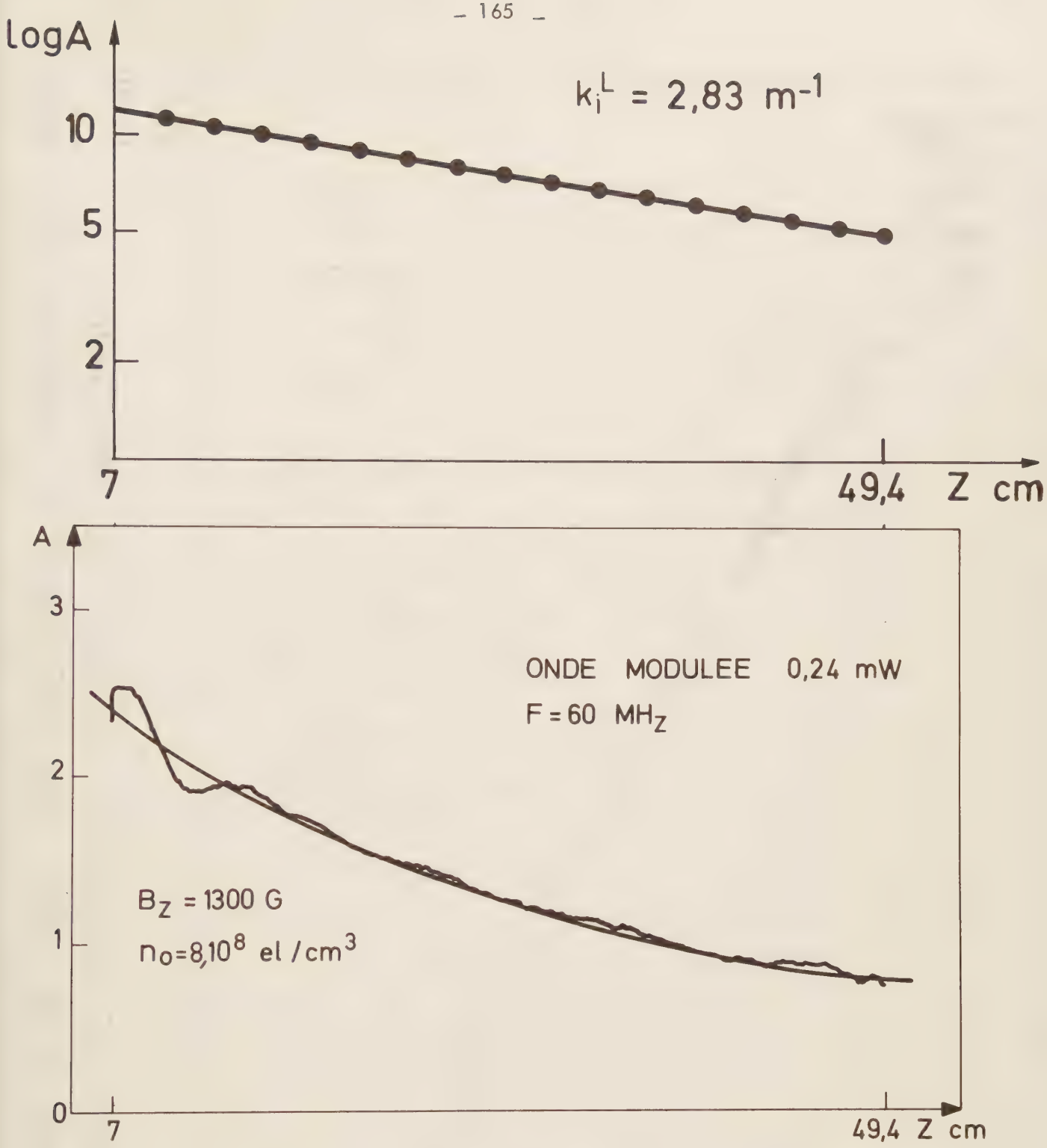


FIG. VII.6. DETERMINATION DU TAUX D'AMORTISSEMENT D'UNE ONDE A 60 MHz SANS SPECTRE DE BRUIT

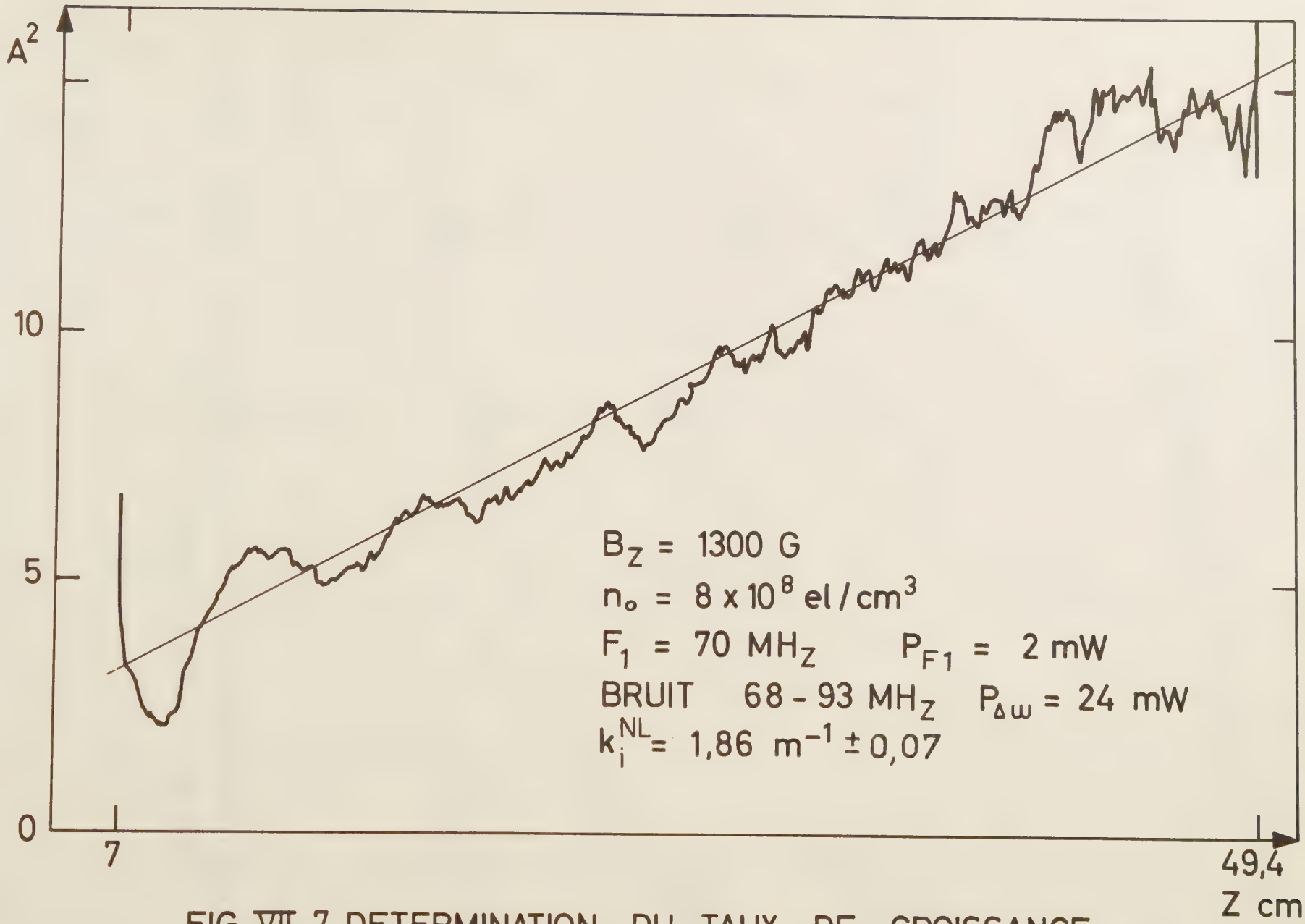


FIG. VII. 7. DETERMINATION DU TAUX DE CROISSANCE D'UNE ONDE A 70 MH_Z EN PRESENCE DU SPECTRE DE BRUIT

Le coefficient d'amortissement est proportionnel à la dérivée de la fonction de distribution au voisinage de la vitesse de phase de l'onde. La mesure de la fonction de distribution et la connaissance de la relation de dispersion conduisent à une estimation de k_i^L.

VII.7-3 La connaissance de la vitesse thermique et de la relation de dispersion des ondes permet de déduire le coefficient d'amortissement Landau k_i^L dans la plupart de nos cas expérimentaux à partir de la courbe universelle représentée sur la figure VII.8.

VII.8 DISCUSSION DES HYPOTHESES

Nous venons de voir que la forme des profils de densité et de potentiel impose l'introduction des effets de géométrie finie radialement dans les calculs théoriques du chapitre II. De même, nous vérifions sur la forme expérimentale de la relation de dispersion que l'introduction d'une relation linéaire dans le domaine du spectre injecté est tout à fait justifiée. Du fait de la forme de la courbe de dispersion, le couplage résonnant à trois ondes ne peut se produire dans le domaine de fréquence utilisé.

Le phénomène de désintégration est éliminé car l'amplitude E_ω de chaque composante du spectre est bien inférieure au seuil de désintégration /1/. Pour éliminer les effets de piégeage, le spectre est choisi de telle sorte que sa longueur de cohérence L_C soit bien inférieure à la longueur de piégeage L_p. Rappelons la définition de la longueur de piégeage /12/ d'une onde caractérisée par son

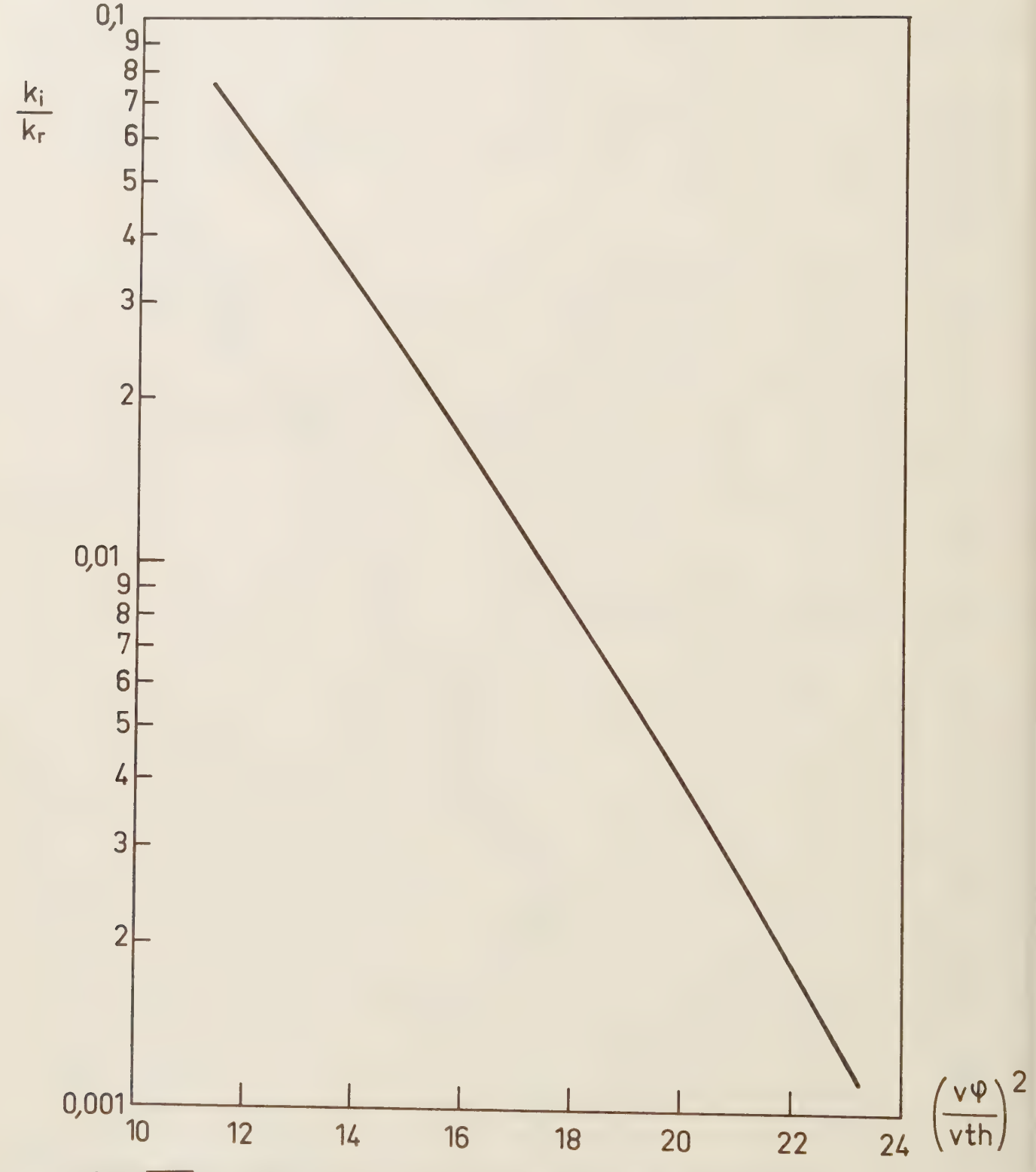


FIG. VII 8 COURBE UNIVERSELLE DONNANT

$$\frac{k_i^L}{k_r} = f\left(\frac{v_\varphi}{v_{th}}\right)^2$$

(d'aprés P.J. Vidmar et J.H. Malmberg.)

nombre d'onde k, sa vitesse de phase v_φ , et le champ E.

(VII.17) $$L_p = 2\pi v_\varphi \left(\frac{me}{qKE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Définissons la longueur de cohérence du spectre de largeur $\Delta\omega = 2\pi \times 25$ MHz ; telle que $\Delta\left(k - \frac{\omega}{v}\right) L_C = \pi$.

(VII.18) $$\boxed{L_C = \frac{\pi}{\Delta\omega} \frac{\overline{v_\varphi}\,\overline{v_g}}{\overline{v_\varphi} - \overline{v_g}}}$$

ou $\overline{v_\varphi}$ et $\overline{v_g}$ sont les valeurs moyennes des vitesses de phase et de groupe pour le spectre d'ondes.

Pour $\Delta\omega = 2\pi \times 25\ 10^6$ Hz ; $\overline{v_g} = 10^6$ m/s et $\overline{v_\varphi} = 2.10^6$ m/s on trouve $L_C \approx 4$ cm, beaucoup plus petite que les longueurs de piégeage d'ondes correspondantes de même amplitude.

Les différentes longueurs d'évolution du potentiel, du nombre d'onde et de la fonction de distribution définies de la façon suivante :

$$L_\phi = \left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^{-1} \quad ; \quad L_K = \left(\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial z}\right)^{-1} \quad ; \quad L_f = \left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}$$

sont telles que :

(VII.19) $$\boxed{L_\phi\ ,\ L_K\ ,\ L_f \gg L_C}$$

Les conditions d'application de la théorie quasilinéaire pour l'évolution de la fonction de distribution sont réunies.

VII.9 ESTIMATION DU PARAMETRE DE TURBULENCE α.

Rappelons que le paramètre de turbulence α est défini par :

$$\alpha = \frac{\xi_f}{\xi_c} = \frac{\text{Puissance dans le plasma}}{\text{Puissance cinétique}}$$

Pour la relation de dispersion linéaire, ξ_f s'exprime à l'aide de la formule (VII.14) :

(VII.20) $$\xi_f = \frac{1}{2} \bar{K}^2 \bar{\Phi}_0^2 \Delta\omega$$

Pour un plasma dont la densité d'énergie cinétique ξ_c (définie au chapitre VI) est égale à 2.10^{-5} Joule/m^3 et dont la densité d'énergie associée au spectre est $\xi_f = 3.10^{-7}$ Joule/m^3 pour un spectre injecté de 10 mW, $\alpha = 0{,}015$.

CHAPITRE VII

BIBLIOGRAPHIE.

/1/ M.PERULLI, thèse, Rapport CEA-R-3639 (1968

/2/ F.PERCEVAL, J.C.BOUSQUET, J.OLIVAIN, M.PARISOT, M.PERULLI
Plasma diagnostics conference, Culham, Août 1968.

/3/ F.PERCEVAL, thèse 3ème cycle, Rapport CEA-R-3740 (1968)

/4/ J. OLIVAIN, F.PERCEVAL et M.PERULLI
C.R. acad. Sciences, t.268, p.1005-1008, Avril 1969
9th International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Bucarest, Septembre 1969

/5/ A.QUEMENEUR, thèse 3ème cycle, Rapport EUR-CEA-FC-529 (1969)

/6/ J.OLIVAIN, Rapport EUR-CEA-FC-746 (1964)

/7/ J.H.MALMBERG, C.B.WHARTON, W.E.DRUMMOND,
Plasma Physics and Controlled nuclear fusion research, Vol.1, p.485, Culham (1965)

/8/ A.QUEMENEUR, F.PERCEVAL, C.ETIEVANT
C.R. acad. Sciences, PARIS, B 268, 139 (1969)
Plasma Diagnostic conference, Culham, Août 1968

/9/ M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, F.PERCEVAL and A.QUEMENEUR,
Xth International Conference on Phenomena in Ionized gases, Oxford, (1971), proceedings p.316.

/10/ M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, F.PERCEVAL et A.QUEMENEUR, IIIrd International Conference on quiescent plasmas, Risö (1971), proceedings p.304

/11/ M.GUILLEMOT, J.OLIVAIN, F.PERCEVAL and A.QUEMENEUR, Journal de Physique, t.32, Fasc.10, 65b -124 (1971)

/12/ A. QUEMENEUR thèse (à paraître)

/13/ T.H.STIX the theory of plasma waves. Mc Graw Hill Book (1962)

CHAPITRE VIII

- EVOLUTION DU SPECTRE PAR EFFET LANDAU NON LINEAIRE
- MISE EN EVIDENCE DES ONDES FORCEES
- CONSERVATION DU FLUX DE PLASMONS
- EFFET LANDAU NON LINEAIRE DANS LE CAS DE DEUX ONDES MONOCHROMATIQUES

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'évolution du spectre de turbulence dans l'espace, pour plusieurs valeurs de la puissance [1,2] ; nous comparons les résultats théoriques des chapitres II et IV aux résultats expérimentaux en utilisant la méthode de calcul numérique décrite au chapitre III [3,4]. Après avoir montré l'existence des ondes forcées non résonnantes et prévu une intéraction énergétique avec les particules du plasma de vitesse égale à celles des ondes forcées, nous vérifions la propriété de conservation du flux de plasmons et nous en déduisons une limite de validité de l'approximation de faible turbulence [3,4]. Un bref rappel concernant l'effet Landau non linéaire dans le cas de deux ondes monochromatiques termine ce chapitre.

VIII.1 EVOLUTION DU SPECTRE AVEC LA DISTANCE

L'évolution du spectre le long de la colonne est mesurée en détectant le signal collecté par la sonde réceptrice mobile, reliée à l'analyseur de spectre par l'intermédiaire d'un amplificateur large bande. Le signal de sortie, linéaire ou logarithmique, de l'analyseur de spectre, est envoyé sur la voie Y d'un enregistreur "XY" où la voie X est une fonction linéaire de la fréquence. On obtient ainsi l'enregistrement de l'amplitude du potentiel (ou sa valeur correspondante en décibels) en fonction de la fréquence dans le spectre. L'évolution du spectre pour différentes distances et pour une valeur fixée de la densité d'énergie des ondes est présentée sur la figure VIII.1, où l'allure du spectre initial est représentée en hachuré.

La partie haute fréquence du spectre s'amortit fortement avec la distance, et cet amortissement croît au fur et à mesure que la fréquence croît. On peut définir une valeur de la fréquence pour laquelle il ne semble pas y avoir d'amortissement (sauf à la distance z = 47,7cm où cela cesse d'être valable). Cette fréquence F_{inter} = 78 MHz est située approximativement au milieu du spectre et suit sensiblement la loi des aires définie au chapitre II :

$$(VIII.1)\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}(\omega,z) = -2K_i^t\,\mathcal{F}(\omega,z) - \beta\int_0^\infty d\omega'\,\mathcal{F}(\omega,z)\,\mathcal{F}(\omega',z)\,\omega\omega'\,\mathrm{Signe}(\omega-\omega')$$

avec $\beta > 0$ (relation II.43).

Les composantes de fréquence inférieure à F_{inter} sont amplifiées, et de même les fréquences plus basses que le spectre sortent du bruit de fond. Ce bruit de fond provient du bruit propre

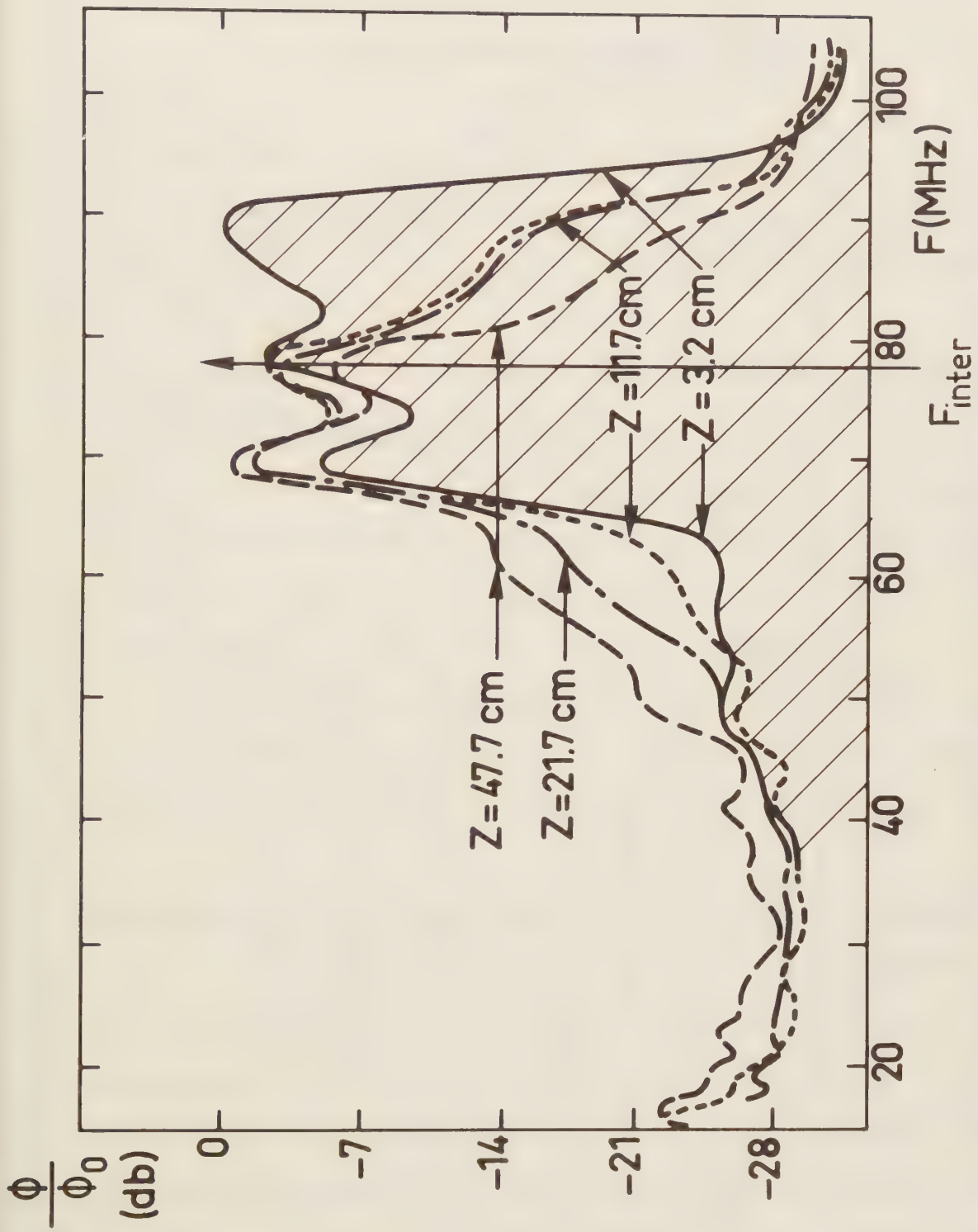


Fig.VIII 1. EVOLUTION DU SPECTRE AVEC LA DISTANCE, POUR UNE PUISSANCE DONNEE, CORRESPONDANT A $\alpha = 0{,}05$
$n_0 = 5.10^8$ el/cm^3; $B_0 = 1300$ G ; $T_e = 3{,}2$ eV

du plasma dû à la fois au bruit de la source proprement dite et à une turbulence naturelle sur les modes plasmas. On pourrait d'ailleurs définir $\alpha_{BF} = \frac{\text{Puissance dans le bruit de fond}}{\text{Puissance cinétique}}$ /

L'amplitude des composantes basse fréquence croît avec la distance. L'effet Landau non linéaire correspond à un transfert d'énergie vers les basses fréquences.

VIII.2 EVOLUTION DU SPECTRE AVEC LA PUISSANCE

La même dérive du spectre vers les basses fréquences est observée lorsque l'amplitude du spectre est augmentée, pour une certaine distance entre la sonde émettrice et la sonde réceptrice. Sur la figure VIII.2, on a "normalisé" les courbes. Pour cela, on a fait varier à la fois la puissance du spectre injecté et de la même quantité le gain du système de réception de telle façon que l'on puisse comparer les taux d'amortissement et de croissance des ondes. On a vérifié la linéarité de la chaîne de réception dans le domaine utilisé.

VIII.3 INFLUENCE DU NIVEAU DE BRUIT DE FOND SUR L'EVOLUTION SPATIALE DU SPECTRE

La figure VIII.3 montre la variation de l'amplitude d'une des composantes du bruit, à 60 MHz, en fonction de la distance, quand l'amplitude initiale du bruit de fond est modifiée artificiellement ; l'amplitude initiale du spectre proprement dit reste constante. Pour faire varier l'amplitude du bruit de fond, on superpose au spectre un bruit large bande généré par un amplificateur du côté des basses fréquences. L'allure du spectre "entier" pour trois différentes puissances du bruit de fond est donnée en haut de la figure VIII.3 ; on

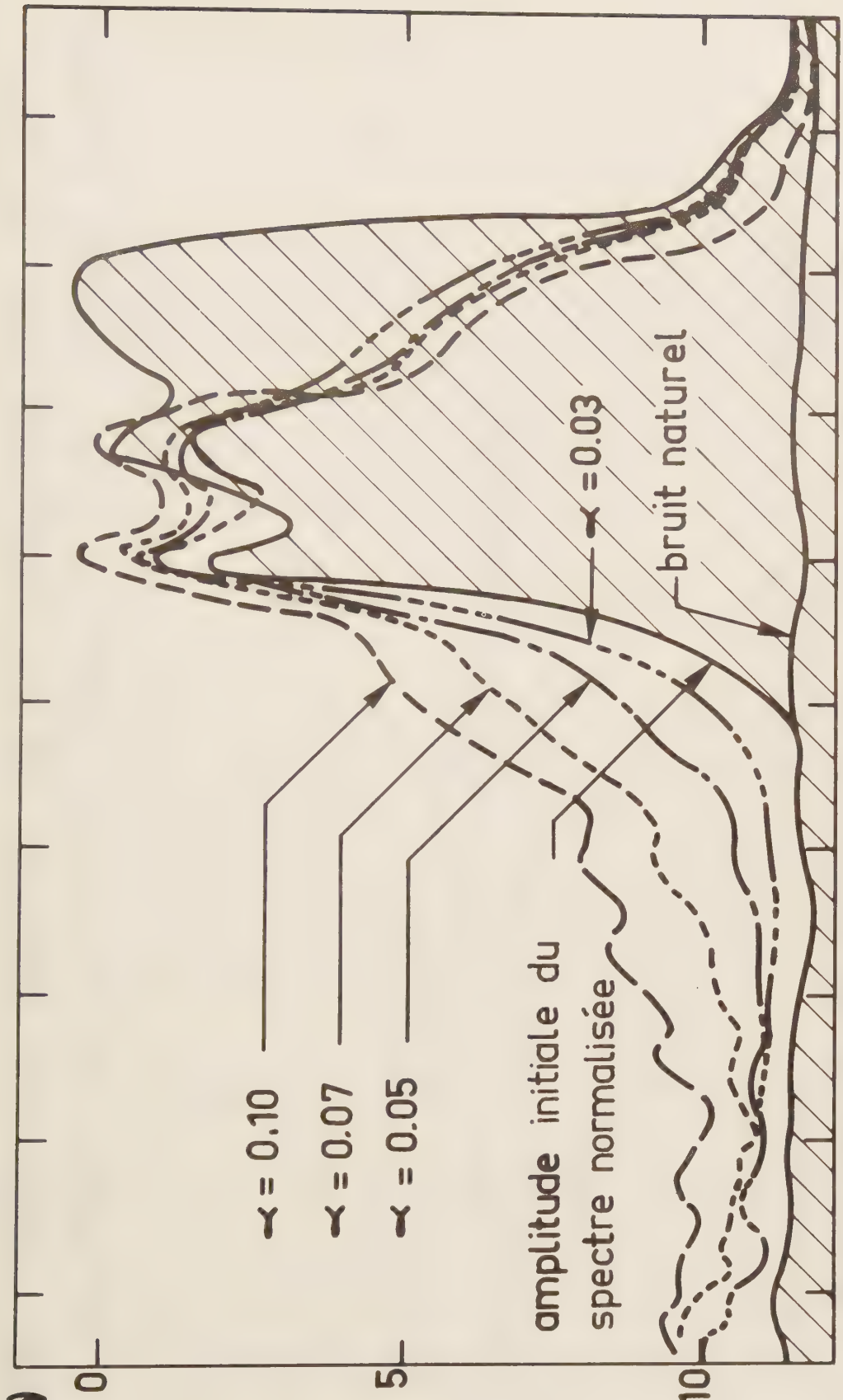


FIG. VIII. 2. EVOLUTION DU SPECTRE AVEC LA PUISSANCE A UNE DISTANCE

$Z = 29$ cm

$n_o = 10^8$ el/cm^3; $B_o = 1300$ G ; $T_e = 3{,}2$ eV.

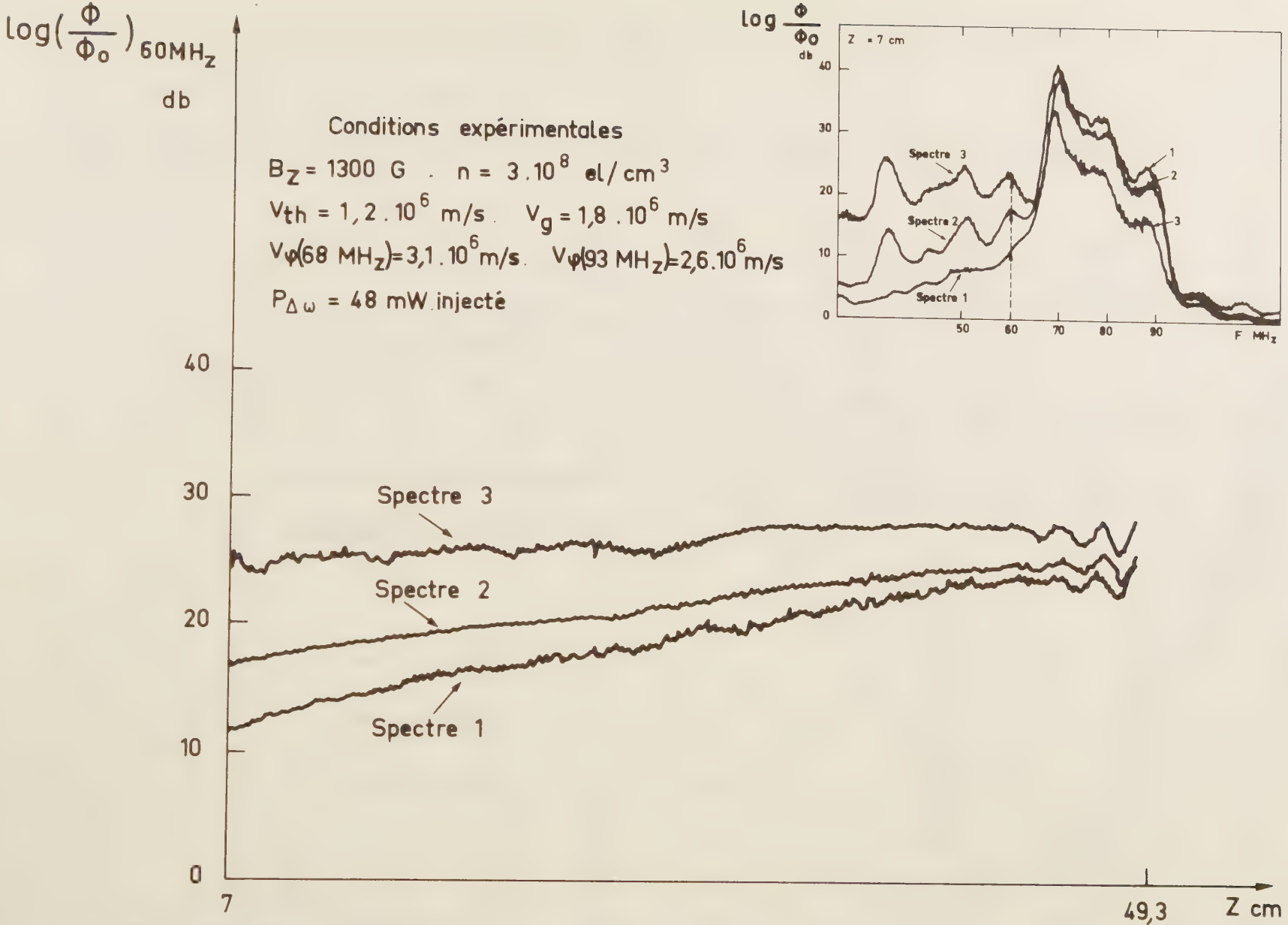


FIG. VIII . 3. INFLUENCE DU NIVEAU DE BRUIT DE FOND BASSE FREQUENCE SUR L'EVOLUTION SPATIALE DE LA COMPOSANTE A 60 MH_z

peut constater que l'amplitude des ondes du spectre de turbulence proprement dit ne reste pas rigoureusement constante quand on passe du "spectre 1" au spectre "3".

S'il s'agissait de courbes représentant le flux de plasmons $\mathcal{F}(\omega,z)$, proportionnel au carré de l'amplitude de chaque composante du spectre, on pourrait évaluer le taux de croissance, proportionnel à la différence des aires entre les axes et $\mathcal{F}(\omega,z)$ après et avant l'onde considérée (paragraphe II.8).

$$k_{i_{croissant}}^{NL} \propto /\overline{(\text{aire après - aire avant})}/$$

Toutefois, l'onde à 60 MHz, sélectionnée à l'aide d'un filtre à bande étroite, a un taux de croissance qui décroît bien au fur et à mesure que le niveau du bruit de fond augmente ; le "poids" de la partie basse fréquence du spectre augmente quand on passe du "spectre 1" au "spectre 3", tandis que le "poids" de la partie haute fréquence du spectre ne varie pratiquement pas.

VIII.4 COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

La figure VIII.4 montre la comparaison entre une courbe expérimentale et la courbe théorique déduite du modèle analytique du chapitre II, développé numériquement au chapitre III, dans le cas d'un spectre initial qui n'est plus rectangulaire, mais qui est le vrai spectre initial, détecté au voisinage de l'émetteur à l'aide de la sonde mobile. A partir de la courbe expérimentale donnant l'amplitude du potentiel de chaque composante, on a calculé la valeur du carré de l'amplitude de chacune des composantes du spectre en fonction de la fréquence, appelée $\langle \varphi \varphi^* (F,z) \rangle$, et c'est l'ensemble

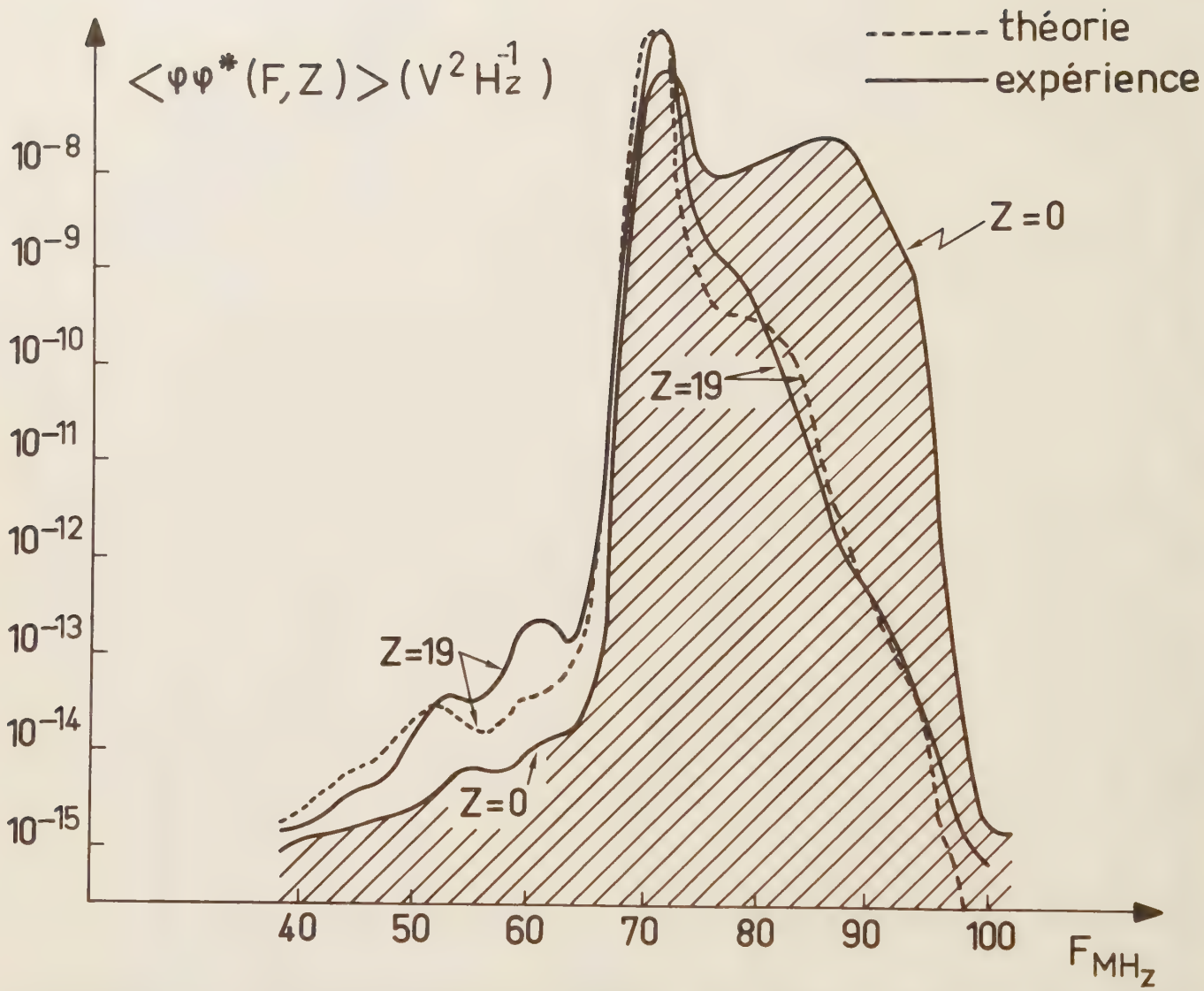


FIG. VIII. 4 . COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU SPECTRE A Z = 19 cm POUR UNE PUISSANCE DE 0,13 mW DANS LE PLASMA

$\int_0^\infty <\varphi\varphi^*(F,Z)>\,dF = <\varphi\varphi^*(Z)>$ EN VOLTS^2

PLASMA D'ARGON $B_0 = 1300$ G $v_{th} = 7{,}3 . 10^5$ m/s

$n_0 = 1{,}3 . 10^8$ el/cm^3 $v_g = 1{,}78 . 10^6$ m/s

de ces valeurs qui représente la courbe dite "expérimentale" représentée en traits pleins. La courbe théorique correspondante est tracée en traits pointillés. Le spectre initial $\langle \varphi \varphi^*(F, z=0) \rangle$ est hâchuré.

La figure VIII.5 montre la comparaison entre trois courbes expérimentales, concernant une même puissance injectée et pour trois valeurs différentes de la distance, et les courbes théoriques correspondantes.

VIII.4-1 Calcul numérique

Pour bien comprendre comment sont tracées les courbes théoriques, nous décrivons de façon détaillée la procédure numérique utilisée pour calculer la quantité réelle $\langle \varphi \varphi^*(F, z) \rangle$ donnée par l'équation différentielle :

$$(VIII.2)\quad \frac{\partial}{\partial z}\langle \varphi\varphi^*(F,z)\rangle = -2K_i^{\perp}\langle \varphi\varphi^*(F,z)\rangle + \int_0^{\infty} dF'\, G\, W(F,F')\langle \varphi\varphi^*(F,z)\rangle\langle \varphi\varphi^*(F',z)\rangle$$

Dans le cas particulier expérimental d'une relation de dispersion donnée par la figure III.2, qui peut être approximée par une droite dès la fréquence 50 MHz, ε_{LR} s'écrit numériquement :

$$(III.3)\quad \varepsilon_{LR} = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{K_r v_g}{\omega} = 1 - \frac{169\ 10^6}{\omega} - \frac{1{,}78\ 10^6 K_r}{\omega}$$

avec ω en Hz et k_r en m^{-1}.

Le terme W (F,F'), égal à :

$$(III.4)\quad W(F,F') = \frac{8(\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_{pe}^2 q^2}{m_e^2 v_{th}^3 \Omega^4 v_g^2} F\left(2\pi F' - \Omega\right)^2 \exp\left(-\frac{v_g^2}{v_{th}^2}\right) \mathrm{Signe}\left(F'-F\right)$$

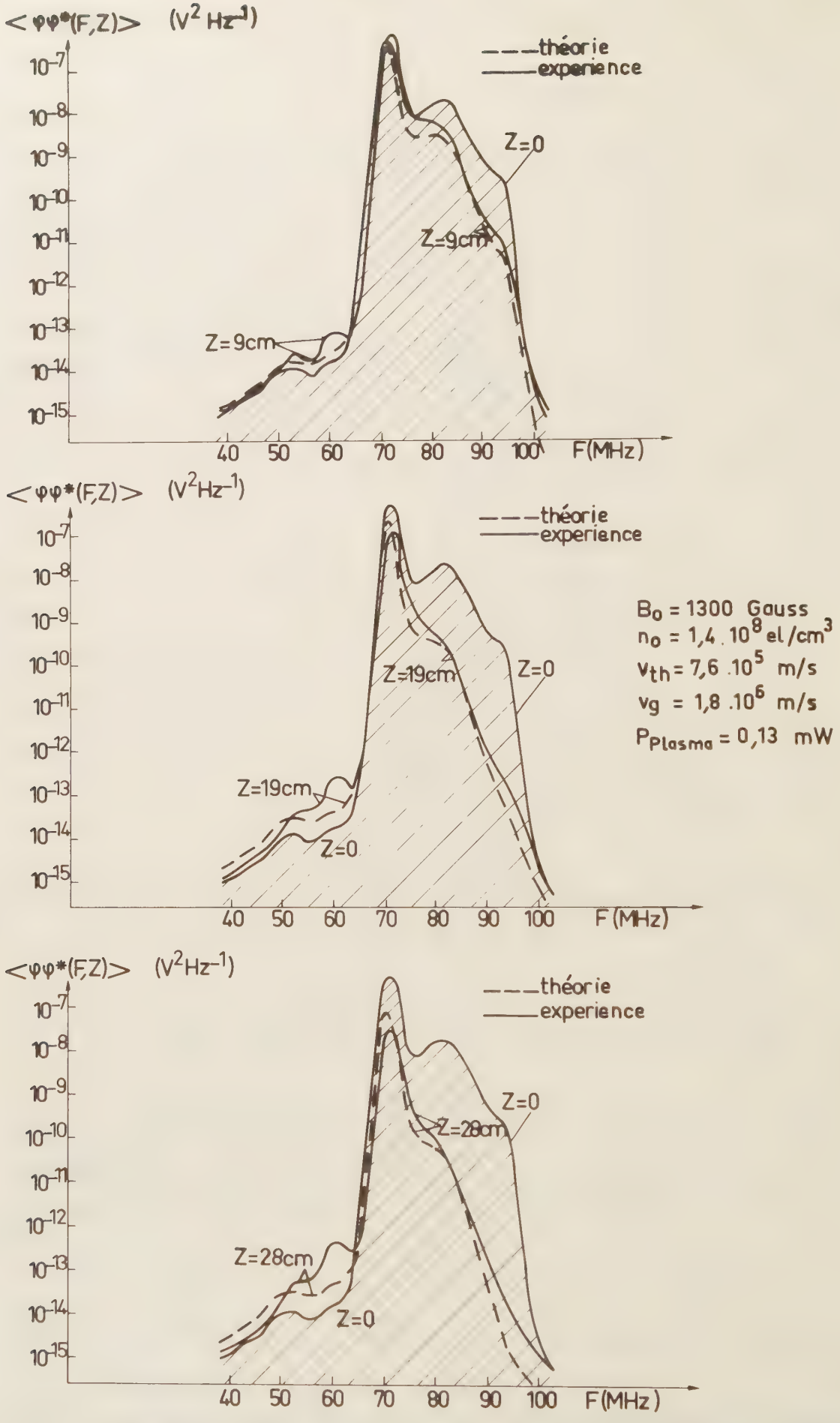


Fig. VIII.5. COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS THEORIQUES ET EXPERIMENTALES DU SPECTRE POUR TROIS DISTANCES DIFFERENTES

peut ainsi être calculé.

L'amortissement Landau k_i^L a été mesuré pour plusieurs valeurs de la fréquence, et nous avons montré que pour ce cas expérimental, il peut être introduit dans les calculs numériques sous la forme :

$$(VIII.5) \quad K_i^L = K_p \left[1,414 - 0,2248\, 10^{-10} \left(\frac{F}{K_p} \right)^2 \right] \qquad \begin{matrix} K_i \text{ et } K_p \text{ en } m^{-1} \\ F \text{ en } Hz \end{matrix}$$

Nous pouvons ainsi calculer $\langle \varphi \varphi^*(F,z) \rangle$ et son évolution, les conditions initiales étant déterminées comme ci-dessous :

Quand nous injectons un spectre, nous connaissons la valeur moyenne de la puissance injectée, reliée à la puissance dans le plasma par la relation :

$$\langle P_p \rangle_t = \frac{\langle P_{injectée} \rangle_t}{\beta_c}$$

où β_c est le coefficient de couplage de la sonde d'émission (chapitre VII). Chaque amplitude des ondes du spectre initial, détecté près de l'émetteur, sous une forme logarithmique analogue à celles des figures VIII.1 et VIII.2, peut être repérée sur l'enregistrement par un certain nombre h, de centimètres. Alors

$$(VIII.6) \quad \langle \varphi \varphi^* (F, z=0) \rangle = \eta \exp \left[2h(F, z=0) \right]$$

et $$\langle \varphi \varphi^* (F,z) \rangle = \eta \exp \left[2h(F,z) \right]$$

La valeur de η, nécessaire à la poursuite du calcul numérique, est trouvée grâce à la relation (VII.13).

$$(VIII.7)\quad \langle P_p \rangle_t = \eta\, \varepsilon_0\, S\, v_g \int_0^{\infty} \exp\left(2\Re(F, z=0)\right) K^2(F)\, dF$$

On trouve une valeur de η pour chaque puissance injectée initialement.

Les valeurs théoriques de $\langle \varphi\, \varphi^*(F,z) \rangle$, représentées en traits pointillés sur les figures (VIII.4) et (VIII.5) sont calculées de cette façon.

Les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord aux hautes fréquences du spectre, même à grande distance et bien que la variation spatiale de la fonction de distribution n'ait pas été prise en compte dans la théorie. Pour les fréquences basses entre 55 MHz et 68 MHz, l'accord est moins bon. Mais nous avons vu au chapitre IV que dans cette région, un accroissement dû au couplage à quatre ondes peut se superposer au mécanisme d'effet Landau non linéaire.

VIII.4-2 Couplage à quatre ondes

Si nous considérons quatre ondes telles que $\boxed{\omega_1 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_2}$ dans le domaine de fréquences où la relation de dispersion peut être approximée par une droite, les règles de sélection sur les fréquences : $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ et sur les nombres d'ondes : $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ peuvent se trouver satisfaites. Nous avons vu au chapitre IV qu'un couplage à quatre ondes peut se produire. Dans le cas de trois ondes de grande amplitude $(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ la quatrième onde ω_1, de faible amplitude, a une variation proportionnelle à $\gamma(\phi_1)$ donnée par l'expression IV.23 qui est très grande dans la zone de fréquences 60-68 MHz, immédiatement en-dessous des fréquences

du spectre de turbulence proprement dit. Sur la figure VIII.6, nous avons représenté la différence entre la courbe expérimentale et la courbe théorique déduite du calcul de l'effet Landau non linéaire dans la zone intéressante des fréquences inférieures au spectre, pour une puissance injectée de 50 mW et à une distance z = 19cm. Nous constatons que cette différence est significative, qu'elle est positive et qu'elle croit pour les fréquences comprises entre 50 et 68 MHz, immédiatement inférieures à celles du spectre. Qualitativement, cet effet correspond au mécanisme de couplage à quatre ondes présenté sur la figure IV.2 et calculé dans le cas d'un spectre rectangulaire. Quantitativement, on ne peut comparer les termes. D'une part, parce que la variation de l'onde de fréquence F_1 n'est proportionnelle à $\mathcal{V}(\phi_1)$ qu'au début de l'intéraction lorsqu'on suppose que les potentiels des ondes ϕ_2 ϕ_3 ϕ_4 n'ont pas eu le temps de varier. D'autre part du fait de toutes les approximations faites pour calculer la matrice de couplage $\mathcal{M}$, pour laquelle tous les facteurs $\frac{k}{\omega}$ ont été pris égaux à une même fraction de $\frac{1}{vg}$. Enfin, l'amplitude des composantes du spectre n'intervient pas. Il n'est donc pas question de faire une comparaison quantitative.

Un autre résultat expérimental tendant à prouver la présence d'un couplage à quatre ondes dans cette zone, et pour les conditions de l'expérience, est illustré par les figures VIII.7 et VIII.8. On a remarqué qu'un onde test, détectée de façon non synchrone, se superposant par exemple à une onde du bruit qui croît, soit avec la puissance, soit avec la distance, commence toujours par décroître si son niveau initial est supérieur à celui d'une onde de bruit à la même fréquence (figure VIII.7), puis elle croît avec le bruit. Dans le cas où la détection synchrone est utilisée, l'onde test superposée au bruit décroît constamment si l'onde "de bruit" la dépasse

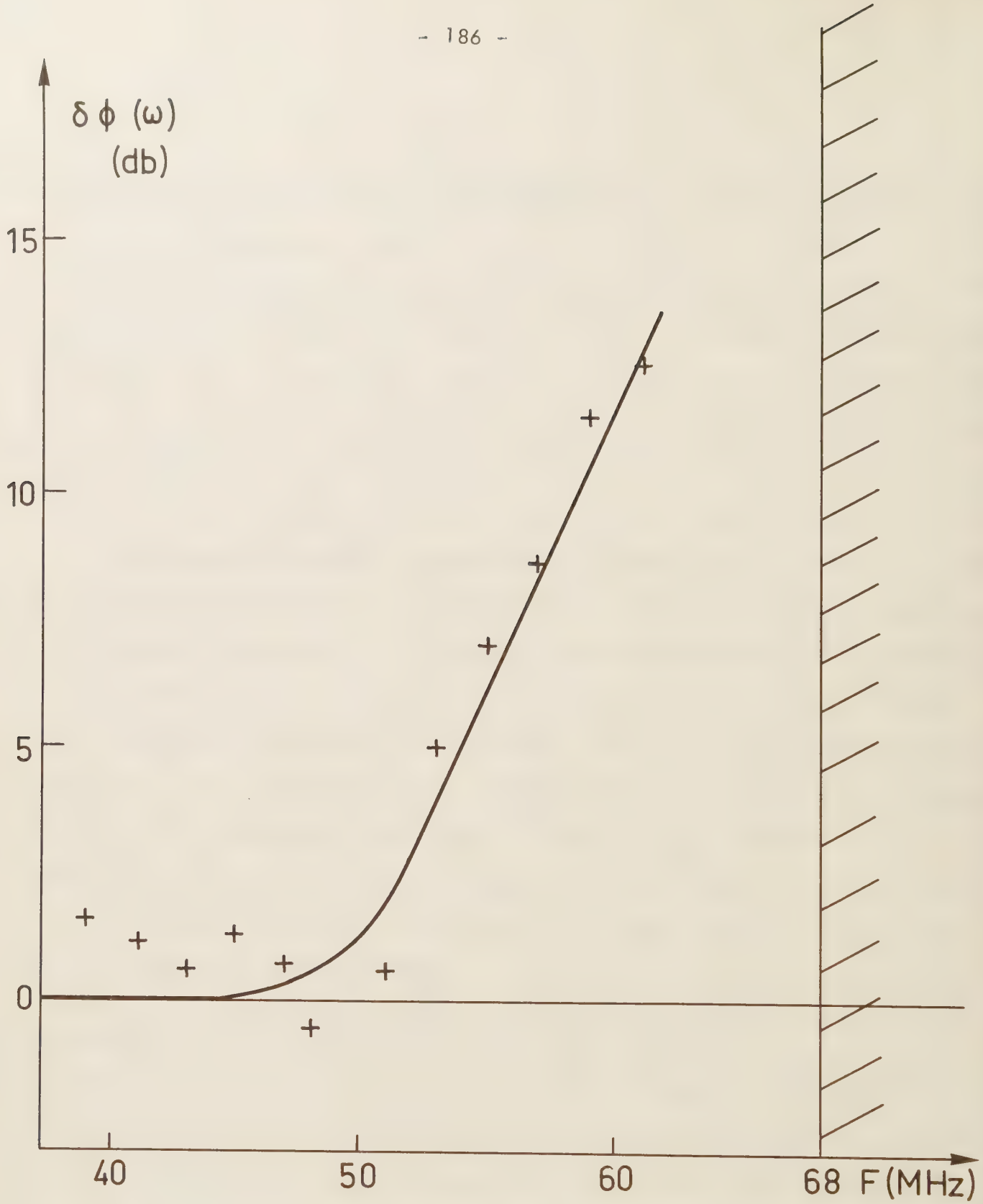


Fig.VIII.6. DIFFERENCE ENTRE LA COURBE EXPERIMENTALE POUR P_{Plasma} =0,13mW, ET LA COURBE THEORIQUE DEDUITE DES CALCULS D'EFFET LANDAU NON LINEAIRE POUR LA MEME PUISSANCE ET A LA MEME DISTANCE Z=19cm.

B_0=1300 G.

n_0=1,3.10^8 el/cm^3: v_{th}=7,3.10^5 m/s v_g = 1,78.10^6 m/s

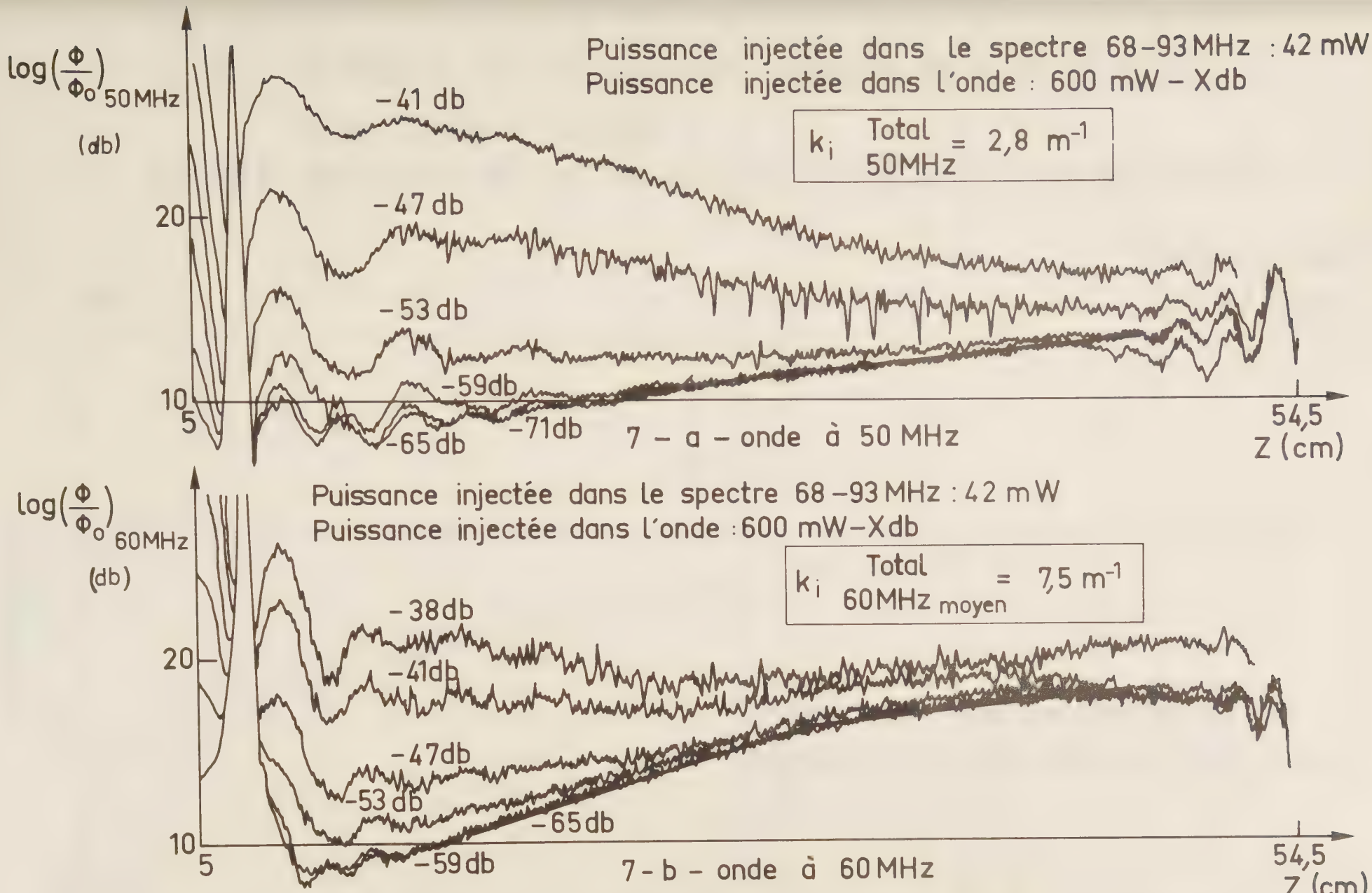


FIG. VIII 7 DETECTION NON COHERENTE D'UNE ONDE TEST EN PRESENCE D'UN SPECTRE DE BRUIT. B_o =1300 G , n_o = 3,3 .10^8 el/cm^3

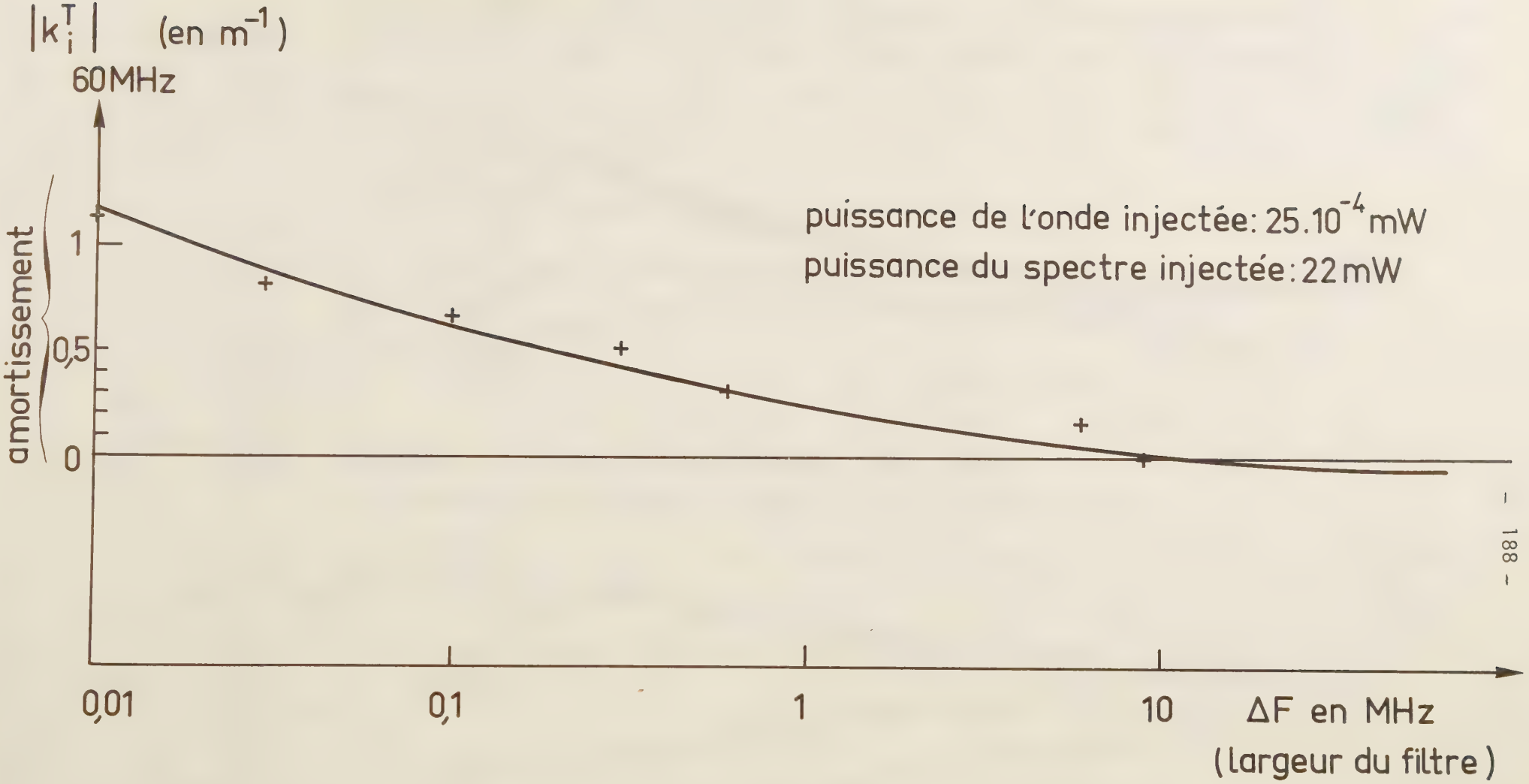


FIG. VIII 8 . INFLUENCE DE LA LARGEUR DU FILTRE SUR L'AMORTISSEMENT D'UNE ONDE A 60 MHz

B_o = 1300 G ; $n_o = 2{,}4.10^8$ el/cm^3 ; spectre de bruit 68-93 MHz

en amplitude.

Toujours dans le cas d'une détection synchrone, le taux de décroissance varie avec la largeur du filtre utilisé pour la détection de l'onde "test". Plus le filtre est large et moins l'onde a tendance à décroître.

Ce résultat, illustré par la figure VIII.8, montre l'influence de la "distribution" d'ondes au voisinage de ω_1 et semble prouver dans ce domaine de fréquences l'existence d'un couplage à quatre ondes.

VIII.5 COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX CONCERNANT LES TAUX DE CROISSANCE OU D'AMORTISSEMENT DE CHAQUE ONDE DU SPECTRE DE TURBULENCE

VIII.5-1 Calcul théorique

L'expression

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\langle \varphi\,\varphi^*(\omega,z)\right\rangle = -2k_i^L\left\langle \varphi\,\varphi^*(\omega,z)\right\rangle + \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} W(\omega,\omega')\left\langle \varphi\,\varphi^*(\omega,z)\right\rangle\left\langle \varphi\varphi^*(\omega',z)\right\rangle$$

peut s'écrire, en posant : $\frac{\partial}{\partial z} + 2k_i^L = 2k_i^{Total}$

$$(VIII.8)\quad k_i^{Total}(\omega) = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega'}{2\pi} W(\omega,\omega')\left\langle \varphi\,\varphi^*(\omega',z)\right\rangle$$

Dans le cas d'une relation de dispersion droite (II.37) et d'une fonction maxwellienne (II.38),

$$(VIII.9)\quad K_i^{Total}(\omega) = -\frac{q^2 \omega_{pe}^2 \omega}{\sqrt{\pi}\, m_e^2 v_{th}^3 \Omega^4 v_g^2} \exp\left(-\frac{v_g^2}{2 v_{th}^2}\right) \int_0^\infty d\omega' (\omega' - \Omega)^2 \langle \varphi \varphi^*(\omega', z) \rangle \operatorname{Sgn}(\omega - \omega')$$

Le calcul peut être fait numériquement pour toutes les fréquences, mais il est particulièrement simple pour les basses fréquences, en particulier celles du bruit de fond, car alors signe de $(\omega-\omega')$ est toujours < 0.

Pour ces basses fréquences (50, 60 MHz),

on peut poser :

$$\omega' - \Omega = \omega_{moyen} - \Omega$$

et :

$$\int_0^\infty \langle \varphi \varphi^*(\omega', z) \rangle \, d\omega' = \overline{\langle \varphi \varphi^*(\omega', z) \rangle}\, \Delta\omega$$

Dans ce cas $k_i^{Total}(\omega)$ s'écrit :

$$(VIII.10)\quad \boxed{K_i^{Total}(\omega) = \frac{\omega_{pe}^2 \omega\, q^2\, \Delta\omega}{\sqrt{\pi}\, m_e^2 v_{th}^3 \Omega^4 v_g^2} \exp\left(-\frac{v_g^2}{2 v_{th}^2}\right) (\omega_{moyen} - \Omega)^2 \overline{\langle \varphi \varphi^*(\omega', z) \rangle}}$$

VIII.5-2 Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux aux basses fréquences

Le calcul théorique donne, pour les valeurs des paramètres expérimentaux de la figure VIII.7 :

$$k_i^{Total}{}_{(60\,MHz)} \text{ en } m^{-1} = 6{,}3.10^8 \overbrace{\langle \varphi\, \varphi^*(\omega, z) \rangle}^{\text{en Volt}^2\, Hz^{-1}} \text{ pour}$$

une distance z de l'ordre de 40 cm.

et :

$$k_i^{Total}{}_{(50\,MHz)} \text{ en } m^{-1} = 5{,}3\,10^8 \overline{\langle \varphi\, \varphi^*(\omega, z) \rangle} \text{ à la même distance.}$$

Pour une valeur donnée de la puissance du spectre de turbulence, les ondes de bruit à 50 et 60 MHz des figures VIII.7-a et b /cas où l'onde test est de puissance négligeable : (600 mW - 65db)/ on peut mesurer un k_i^{Total} expérimental :

$$\begin{cases} k_i^{Total}{}_{(60\,MHz)} = 7{,}5\ m^{-1} \\ k_i^{Total}{}_{(50\,MHz)} = 2{,}8\ m^{-1} \end{cases}$$

En utilisant les résultats du chapitre VII (VII.14) le φ moyen correspondant à une puissance injectée de 42 mW, soit 0,5mW dans le plasma, est égal à $10^{-4} V.Hz^{-1/2}$; ce qui donne les valeurs calculées suivantes pour k_i^{Total} :

$$k_i^{Total}{}_{(60\,MHz)} = 6{,}3\ m^{-1} \quad \text{et} \quad k_i^{Total}{}_{(50\,MHz)} = 5{,}3\ m^{-1}$$

Les valeurs théoriques et expérimentales sont du même ordre de grandeur .

VIII.6 MISE EN EVIDENCE DES ONDES FORCEES

L'identification du mécanisme Landau non linéaire est confirmée par la présence d'ondes forcées correspondant à chaque couple de fréquences prises deux à deux dans le spectre de turbulence. Deux ondes test monochromatiques de fréquences F_i et F_j, ayant la même amplitude que les ondes de même fréquence du spectre, sont ajoutées au spectre. L'une des deux ondes est modulée par des signaux carrés, de façon à utiliser la méthode de détection synchrone décrite au chapitre VII. Les signaux d'intercorrélation de chaque onde test, de l'onde "fille" de fréquence $F_{ij} = F_i - F_j$, détectés à la fréquence de modulation et obtenus en faisant varier la distance d'intercorrélation sont représentés sur la figure VIII.9. Le dépouillement des signaux d'intercorrélation nous permet d'accéder aux nombres d'onde k_i , k_j des ondes "mères" et au nombre d'onde k_{ij} de l'onde forcée. Ce nombre d'onde est bien tel que $k_{ij} = k_i - k_j$, comme la théorie le laissait prévoir. Sur la figure VIII.9-c, on ne peut voir la longueur d'onde résonnante correspondant à $F_i - F_j$, car elle est de l'ordre de grandeur de la colonne de plasma. Au début du processus, dans la zone d'interaction, apparaît essentiellement la solution forcée $k_{ij} = k_i - k_j$; si la solution résonnante est aussi présente, elle est de niveau très inférieur à celui de la solution forcée. Toutefois, si on pouvait suivre le phénomène sur une plus grande distance, on verrait la solution résonnante correspondant à la nouvelle fonction de distribution prendre de plus en plus d'importance. A très grande distance, elle seule doit subsister.

La mesure du nombre d'onde de l'onde forcée est répétée pour un certain nombre de couples d'ondes test, de fréquences s'étendant au-delà du spectre de bruit, car pour des raisons d'ordre purement technique, la différence $F_i - F_j$ est maintenue égale à 30 MHz,

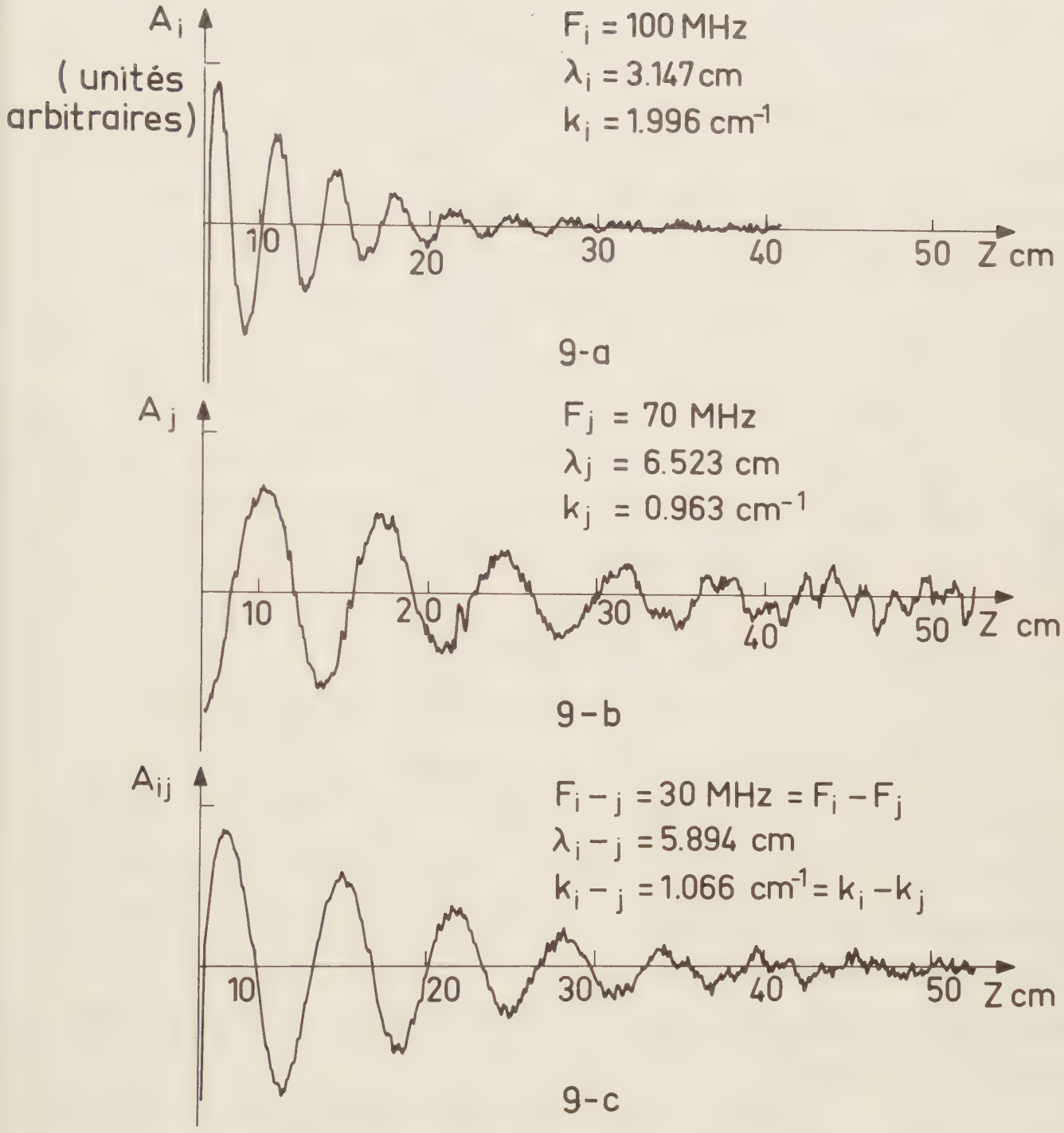


FIG VIII 9. SIGNAUX D'INTERCORRELATION DE DEUX ONDES TEST ET DE L'ONDE FORCEE CORRESPONDANTE

Plasma d argon ; $n_o = 1{,}35.10^8$ el/cm^3 ; $B_o = 1300$ G

$v_{th} = 8{,}6.10^7$ cm/s , puissance$_{\Delta\omega}$ dans le plasma $= 0{,}65$ mW

et l'onde forcée a donc toujours la même fréquence. Pour chaque couple de fréquences, on a représenté avec le même symbole ω_i, ω_j ω_{ij} en fonction des nombres d'onde correspondants, k_i, k_j et k_{ij}. On obtient les résultats présentés sur la figure VIII.10. La valeur expérimentale du nombre d'onde d'une onde à 30 MHz se propageant seule dans le plasma est aussi représentée. On voit sur la figure VIII.10 que la vitesse de phase de telles ondes forcées s'étale sur un domaine englobant la vitesse de groupe des ondes du spectre injecté et que cette même vitesse de phase se rapproche de la vitesse thermique des électrons pour les valeurs élevées de la fréquence des ondes test. On doit donc s'attendre à une interaction entre les particules et les ondes forcées au voisinage de cette vitesse de groupe.

VIII.7 CONSERVATION DU NOMBRE DE PLASMONS

Nous avons vu au chapitre II qu'une des propriétés liées à l'effet Landau non linéaire est la conservation spatiale du flux de plasmons, dans le cas où l'amortissement Landau peut être négligé. Comme dans la plupart des cas expérimentaux, la vitesse de groupe est approximativement identique pour toutes les composantes du spectre et que $F_T = S \times vg \times N$, (où N est le nombre absolu de plasmons), ce nombre absolu de plasmons doit être conservé dans l'espace. Le nombre absolu de plasmons est donné par la relation :

$$N = \frac{\varepsilon_o}{2\hbar} \int_o^\infty \frac{K^2(F) \langle \varphi \varphi^*(F,z) \rangle}{F} dF \qquad \text{(VIII.11)}$$

hF étant l'énergie élémentaire d'un plasmon (h est la constante de Planck).

On a pu calculer numériquement, à partir des résultats du

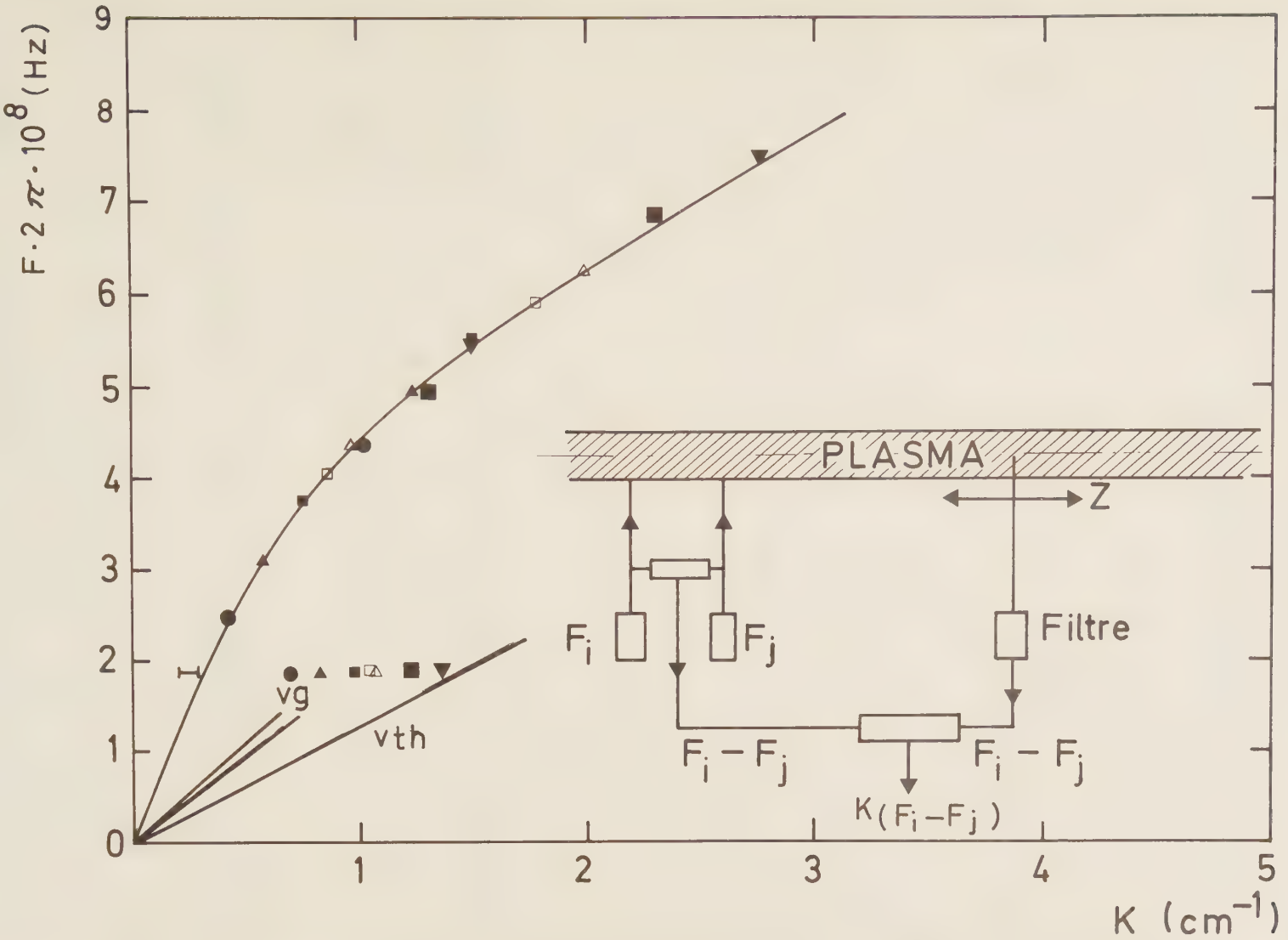


FIG VIII 10. MISE EN EVIDENCE DE L'OSCILLATION FORCEE [$F=F_i-F_j$, $K=K_i-K_j$].

paramétres expérimentaux : plasma d'argon , $\omega_p = 5{,}0 \times 10^8$ Hz
$V_{th} = 8{,}6 \times 10^7$ cm/s ; $B_o = 1{,}3$ kG.

paragraphe (VIII.4), le nombre de plasmons correspondant à différentes distances sonde émettrice - sonde réceptrice, et pour plusieurs valeurs de la puissance dans le spectre. Pour chaque distance étudiée, on a bien sûr tenu compte de la perte de plasmons associée à l'amortissement Landau linéaire en multipliant chaque terme $k^2(F)|\varphi^2(F)|$ par $\exp(2k_{iF}z)$. Sur la figure VIII.11, on a reporté le nombre de plasmons en fonction de la distance et pour différentes valeurs de l'énergie du spectre. Compte tenu de l'incertitude sur la détermination de l'amplitude de chaque composante du spectre, nous pouvons définir pour chaque puissance une valeur moyenne sur l'espace du nombre de plasmons. Si nous reportons les variations de la valeur moyenne ainsi définie du nombre de plasmons en fonction de la puissance, nous nous apercevons que les points se situent sur une droite, au moins pour les faibles valeurs de la puissance. Sur la figure VIII.12, nous voyons qu'au-dessous d'une certaine puissance, le nombre de plasmons croît linéairement avec la puissance. La linéarité cesse d'être valable pour une puissance de 0,1mW, ce qui correspond à une valeur du paramètre α de turbulence de l'ordre de 0,08. Cette valeur coïncide sensiblement avec celle donnée référence /5/, égale à $\left(\frac{v_{th}}{v_\varphi}\right)^2$. Dans le cas expérimental de référence, $\left(\frac{v_{th}}{v_\varphi}\right)^2 = 0{,}08$

Au-delà de ce seuil, un supplément de puissance provoque un fort chauffage des particules ; le mécanisme continue de se développer, bien que le milieu ait tendance à refuser cet accroissement de puissance. Le spectre prend une allure que nous qualifions "d'asymptotique" et sur laquelle nous reviendrons au chapitre X.

La valeur $\alpha = 0.08$, qui correspond aussi à un écart à la courbe de dispersion initiale et pour laquelle le traitement de perturbation cesse d'être valable, peut être considérée comme une valeur limite de l'approximation de faible turbulence (Nous traiterons de la déformation de la courbe de dispersion au chapitre IX).

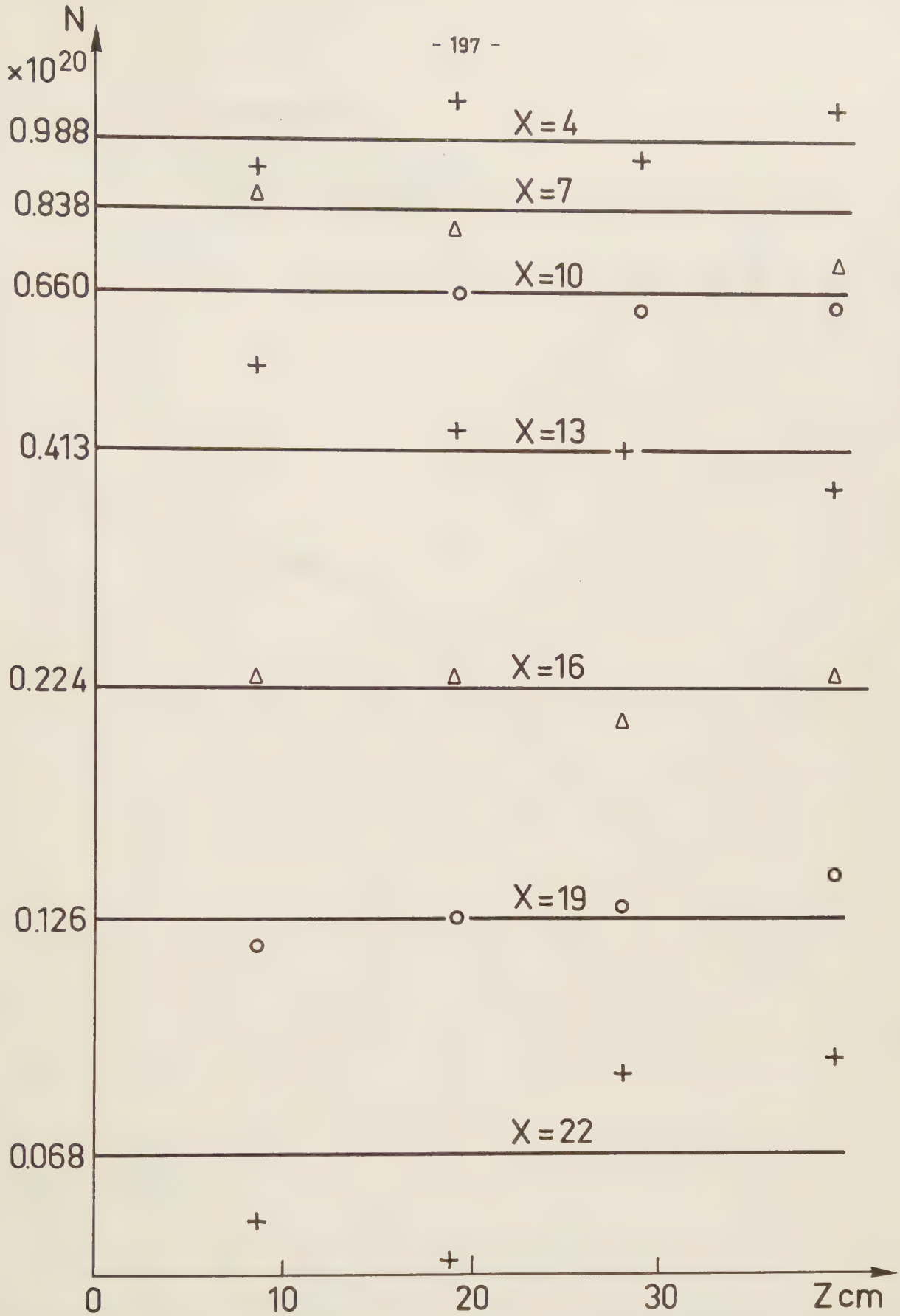


FIG VIII 11. CONSERVATION SPATIALE DU NOMBRE DE PLASMONS

$$N = \frac{\varepsilon_0}{2h} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \phi^2 dF}{F}$$

B_0=1300G ; n_0= 2,3 10^8 el/cm^3 ; v_{th}= 8,9.10^5 m/s , P inj. =130mW-Xdb

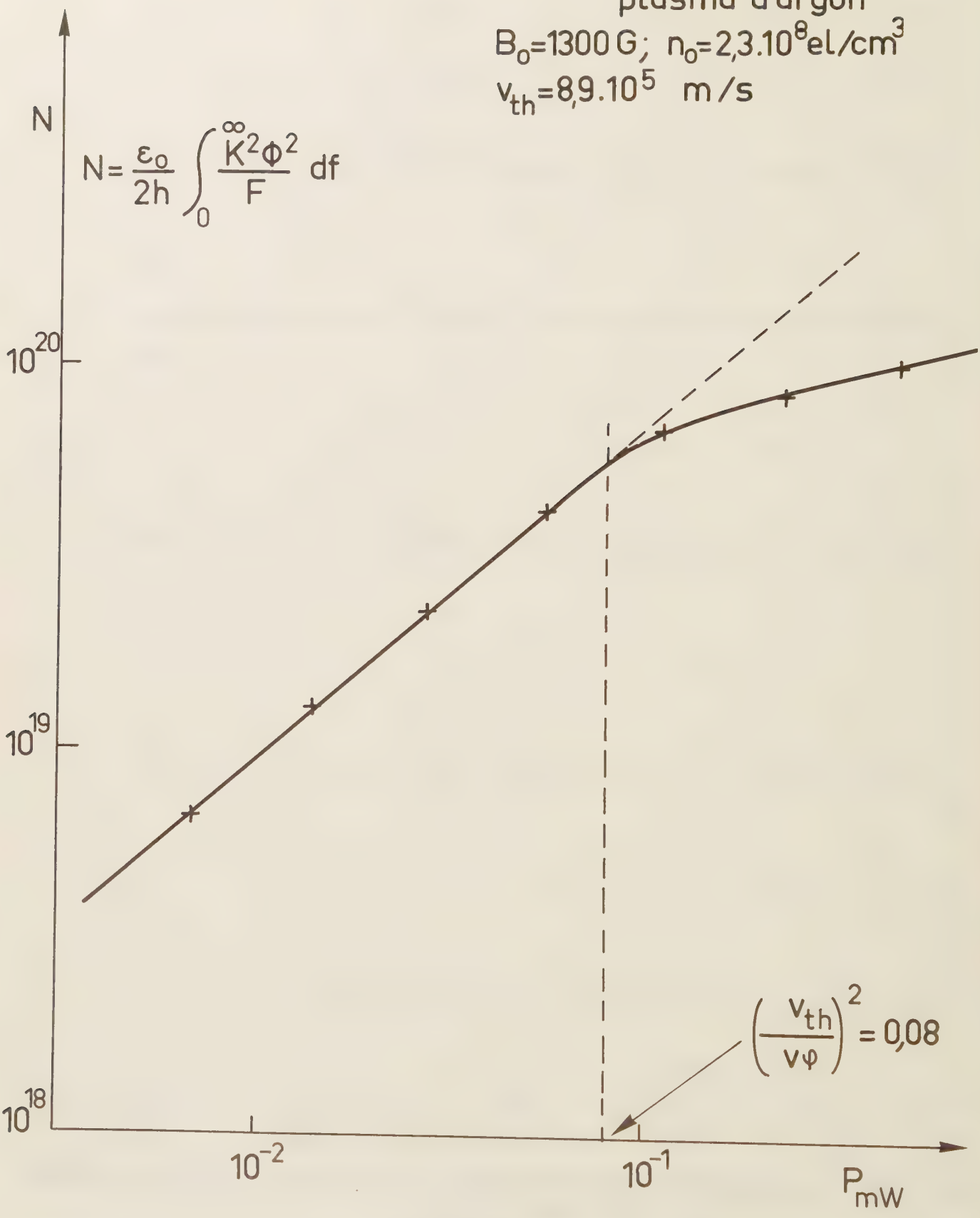


FIG. VIII 12 SATURATION DU NOMBRE DE PLASMONS AVEC LA PUISSANCE DU SPECTRE DANS LE PLASMA

VIII.8 EFFET LANDAU NON LINEAIRE DANS LE CAS DE DEUX ONDES MONOCHROMATIQUES

L'évolution non linéaire de l'amplitude de deux ondes monochromatiques, sans spectre de bruit, déjà étudiée /6/ a été observée. Une variation du taux d'amortissement d'une onde en présence d'une autre onde a été mise en évidence. La méthode de détection synchrone utilisée pour mesurer le changement d'amortissement d'une onde en présence de l'autre ne permettant pas d'en donner le signe, une méthode "grossière" de détection a été utilisée pour conclure à une croissance où à un amortissement supplémentaire. Le supplément d'amortissement de l'onde de plus haute fréquence a été très bien vu. Il a fallu par contre augmenter sensiblement les puissances injectées pour déceler la croissance de l'onde de plus basse fréquence. Les résultats sont présentés sur la figure VIII.13.

Pour illustrer de manière simple l'effet Landau non linéaire dans le cas de deux ondes, reprenons une idée de Schmidt /7/.

Deux ondes de pulsations voisines ω_1 et ω_2 créent une onde de battement qui se propage à la vitesse $v = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$ qui est la vitesse de groupe des ondes mères.

La particule de vitesse vg voit donc un champ E d'amplitude égale à l'amplitude de l'enveloppe. Il se produit une interaction entre l'onde de battement et les particules de vitesse vg du fait de la création d'une force pondéromotrice :

$$(\text{VIII.12}) \quad \left\langle \vec{F}^{(2)}_{force\,(v_g)} \right\rangle_t = - e \, \text{grad} \left(\frac{eE^2}{4 m_e \omega^2} \right)$$

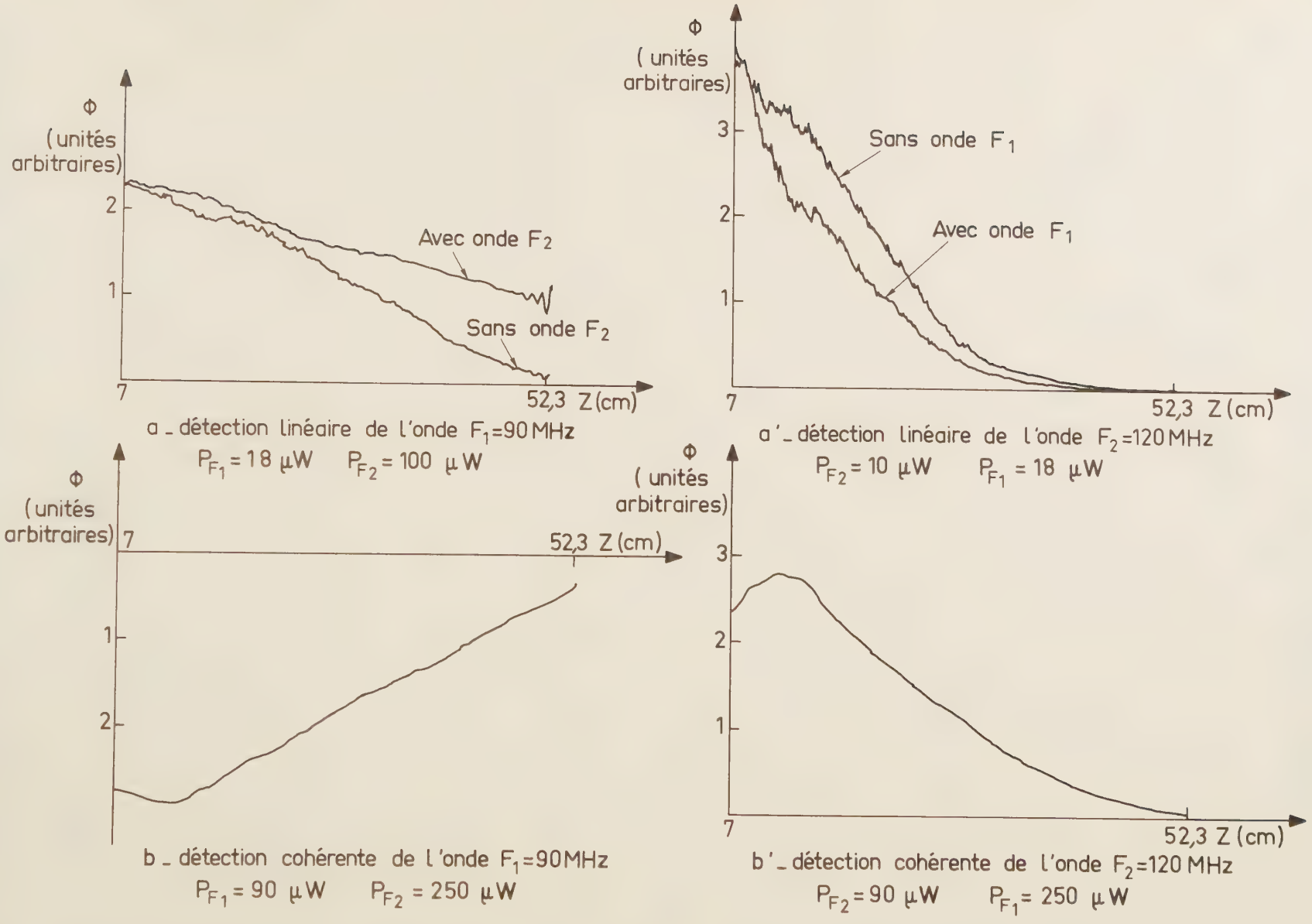


FIG. VIII 13 - EFFET LANDAU NON LINEAIRE DANS LE CAS DE DEUX ONDES MONOCHROMATIQUES

plasma d'argon ; B_0 = 1300 G ; $n_0 = 3 \cdot 10^8$ el/cm^3

Si la vitesse de groupe est voisine de la vitesse thermique, beaucoup de particules participent à l'interaction.

Au cours de l'interaction, il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Ecrivons la conservation de l'énergie dans le cas temporel :

$$\text{(VIII.13)} \qquad \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \frac{dW_c}{dt} = 0$$

où E_1 et E_2 sont les énergies associées aux ondes et W_c est l'énergie cinétique des particules à la vitesse vg. $W_c = \frac{m_e v_g^2}{2}$

Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement dans le cas temporel :

$$\text{(VIII.14)} \qquad \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \frac{dp}{dt} = 0$$

où p_1, p_2, p sont les quantités de mouvement associées aux ondes et aux particules de vitesse vg.

$$p = m_e v_g$$

En mécanique quantique, on montre que l'énergie élémentaire associée à une onde est $\hbar\omega$ où $\hbar$ est égale à la constante de Planck divisée par 2π.

La quantité de mouvement élémentaire associée à l'onde est $\hbar k$.

Nous en déduisons :

$$\frac{E_1}{p_1} = \frac{\omega_1}{k_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{E_2}{p_2} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

Multiplions (VIII.14) par $\frac{\omega_2}{k_2}$ et soustrayons de (VIII.13).

Nous obtenons :

$$(VIII.15) \qquad \frac{dE_1}{dt} = -\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}\frac{dW_c}{dt}$$

De la même façon, nous obtenons :

$$(VIII.16) \qquad \frac{dE_2}{dt} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\frac{dW_c}{dt}$$

Nous voyons facilement que si $\omega_1 < \omega_2$, l'onde de pulsation ω_1 a tendance à croître alors que l'onde de pulsation ω_2 décroît.

Les expressions (VIII.15) et (VIII.16) permettent d'écrire :

$$(VIII.17) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2}\right] = 0$$

La quantité $\Sigma \frac{E}{\hbar\omega}$ représente le nombre N de plasmons.

Nous retrouvons la propriété de conservation du nombre de plasmons dans le cas temporel.

VIII.9 CONCLUSION

L'évolution du spectre large bande d'ondes "plasma électronique" et la croissance du bruit de fond existant dans le plasma obéissent aux conclusions théoriques de l'effet Landau non linéaire en milieu fini radialement. Des ondes forcées correspondant à chaque couple d'ondes du spectre ont été identifiées. La vitesse de phase de l'onde forcée $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ est égale à la vitesse de groupe des ondes mères. Une intéraction entre l'onde forcée et la particule de même vitesse se produit. Un échange d'énergie est prévu entre les ondes et les particules de vitesse voisine de la vitesse de groupe des ondes du

spectre. Cet échange est montré de manière simple dans le cas de deux ondes monochromatiques. La vérification expérimentale de la conservation du flux de plasmons en l'absence d'amortissement 'linéaire" a permis de donner une limite au domaine de validité de l'approximation de faible turbulence.

CHAPITRE VIII

BIBLIOGRAPHIE

/1/ J. OLIVAIN and G. MATTHIEUSSENT, Phys. Rev. Letters, 34, n° 26, (1975)

/2/ G. MATTHIEUSSENT, F. GERVAIS, J. OLIVAIN, A.P.S. meeting 2F12, 1254 (1975)

/3/ F. GERVAIS, G. MATTHIEUSSENT, J. OLIVAIN and A. QUEMENEUR, XIIth International Conference on phenomena in ionized gases, Eindhoven, proceedings p. 321 (1975)

/4/ F. GERVAIS, G. MATTHIEUSSENT, J. OLIVAIN and A. QUEMENEUR EUR-CEA-FC 841 (1976)
accepté pour publication à Phys. of Fluids.

/5/ A.A. VEDENOV and L.I. RUDAKOV, Sov. Phys. Doklady 9, 1073 (1965)

/6/ K.W. GENTLE and A. MALEIN, Phys. Rev. Letters 26, 625 (1971)

/7/ G. SCHMIDT Conférence à l'école Polytechnique (1976)

CHAPITRE IX

DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION ET CHAUFFAGE DES ELECTRONS

La fonction de distribution des électrons initiale et son évolution quand le spectre d'ondes interagit sont mesurées avec l'analyseur électrostatique multigrille décrit au chapitre VI. On peut faire varier la distance sonde émettrice-analyseur pour un spectre de puissance donnée, ou bien faire varier la puissance du spectre, à une distance donnée entre l'émetteur et l'analyseur. Une déformation de même allure est observée dans les deux cas. Elle correspond à une augmentation du nombre de particules de grande vitesse et à une diminution du nombre de particules de faible vitesse, donc à un chauffage des électrons /1, 2/. Les causes de variation des vitesses de phase et de groupe dues aux réalités expérimentales sont aussi considérées, car une variation de la vitesse de groupe modifie la localisation de la déformation due au terme résonnant dominant $F_o^{R,g}(z,v)$ et les variations des vitesses de phase et de groupe peuvent expliquer la déformation de l'ensemble de la fonction de distribution électronique.

IX.1 CONSERVATION DU COURANT TOTAL COLLECTE PAR L'ANALYSEUR AU POTENTIEL PLASMA

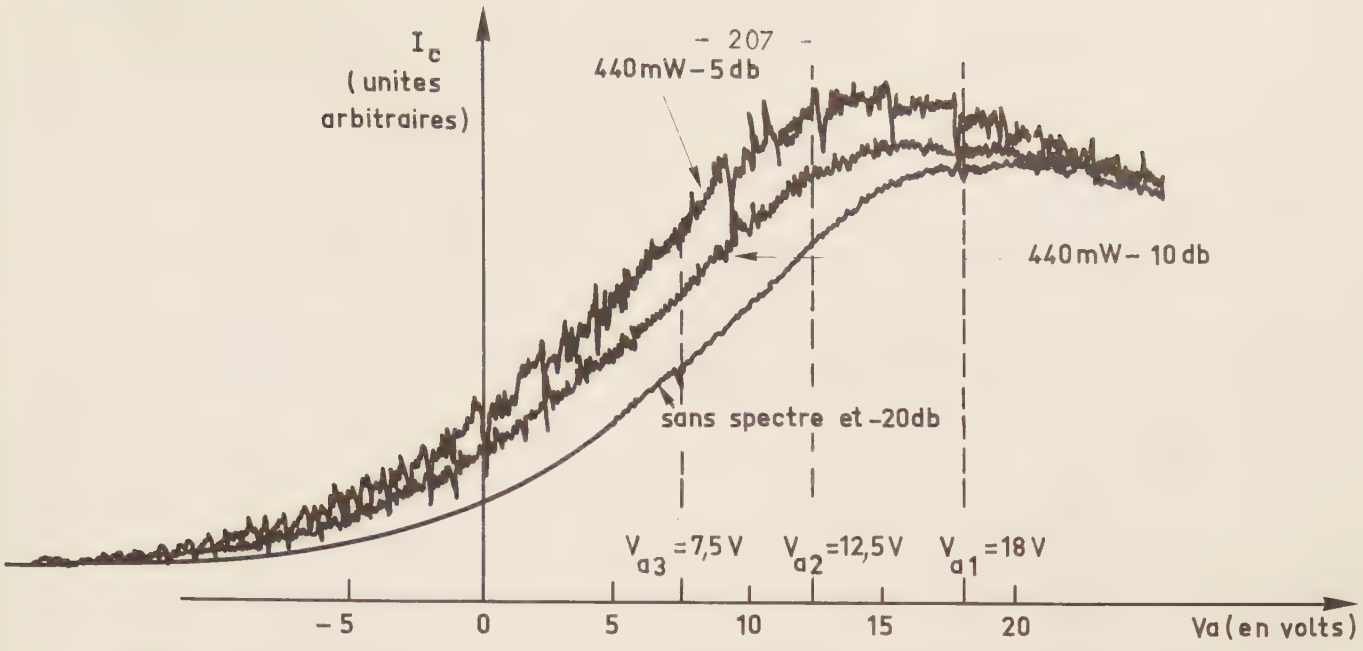
Une méthode rapide pour vérifier si l'électrode d'entrée est approximativement au potentiel plasma a été utilisée. Elle consiste à utiliser la propriété suivante : le courant total collecté par l'analyseur se conserve le long de la colonne, même en présence du spectre de turbulence. Le courant est I = J x s où J est la densité de courant par m^2 et s la surface collectrice.

$$J = q\int_0^{\infty} F_0(v)\, v\, dv \qquad \text{avec} \qquad F_0(v) = \frac{\sqrt{2}\, n_0}{\sqrt{\pi}\, v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{2 v_{th}^2}\right)$$

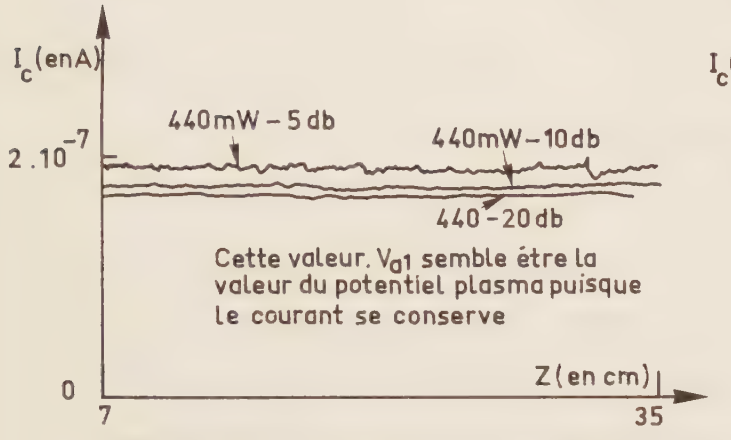
$$J = \frac{n_0 \sqrt{2}\, v_{th}\, q}{\sqrt{\pi}}$$

Pour un plasma : $n_0 = 1{,}1\, 10^{14}$ el/cm^3 ; $v_{th} = 7\, 10^5$ m/s ; $q = -1{,}6\, 10^{-19}$ Cb

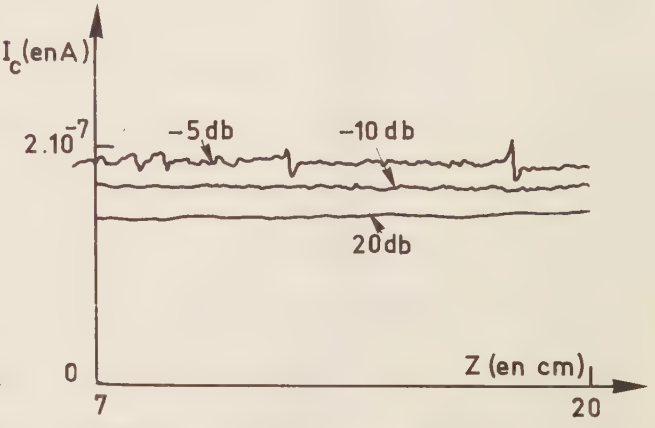
et pour une cible de rayon 5mm : $I = -0{,}77\, 10^{-3}$ Ampère.
En l'absence du spectre de turbulence, c'est donc le courant de saturation qui doit être conservé. Sur la figure IX.1a, on peut repérer la valeur de la tension d'analyse correspondant à cette saturation. Si la propriété de conservation du courant est bien vérifiée, c'est pour cette valeur Va1 que le courant collecté avec ou sans spectre de turbulence se conserve spatiallement. Ceci est bien mis en évidence sur la figure IX.1b. Cette conservation du courant n'est pas réalisée si les tensions d'analyse sont respectivement choisies égales à Va2 et Va3 comme le montrent les



IX.1a. Courant collecté $I_c = f(V_a)$ pour differentes valeurs de la puissance injectée



IX.1b Variation du courant maximum collecté avec la distance pour une tension d'analyse égale à V_{a1}=18 Volts



IX1 c Variation du courant maximum collecté avec la distance pour une tension d'analyse égale à V_{a2}=12,5 Volts

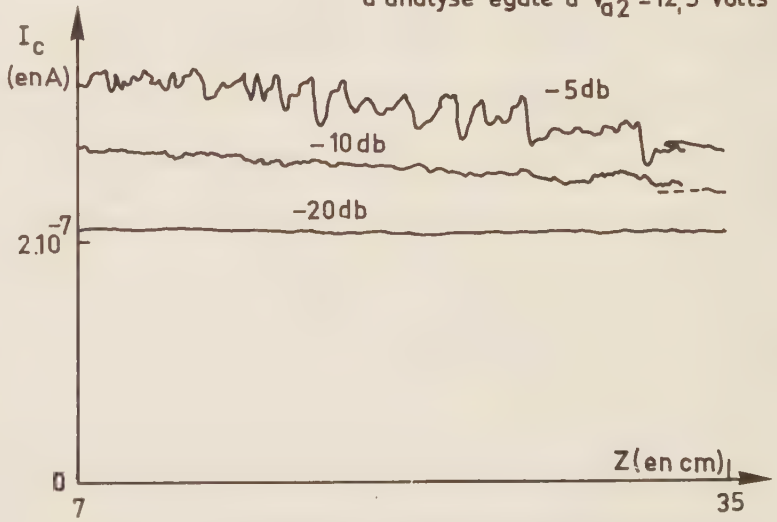
Plasma d'argon B_0=1500 G

n_o=1,4.10^8 el/cm^3

analyseur :

V_e=+10 V ; $V_i = V_c$= 60 V

Puissance injectée dans le spectre
440mW- X db



IX 1d Variation du courant maximum collecté avec la distance pour une tension d'analyse égale à V_{a3}=7,5 Volts

FIG.IX 1 CONSERVATION DU COURANT TOTAL

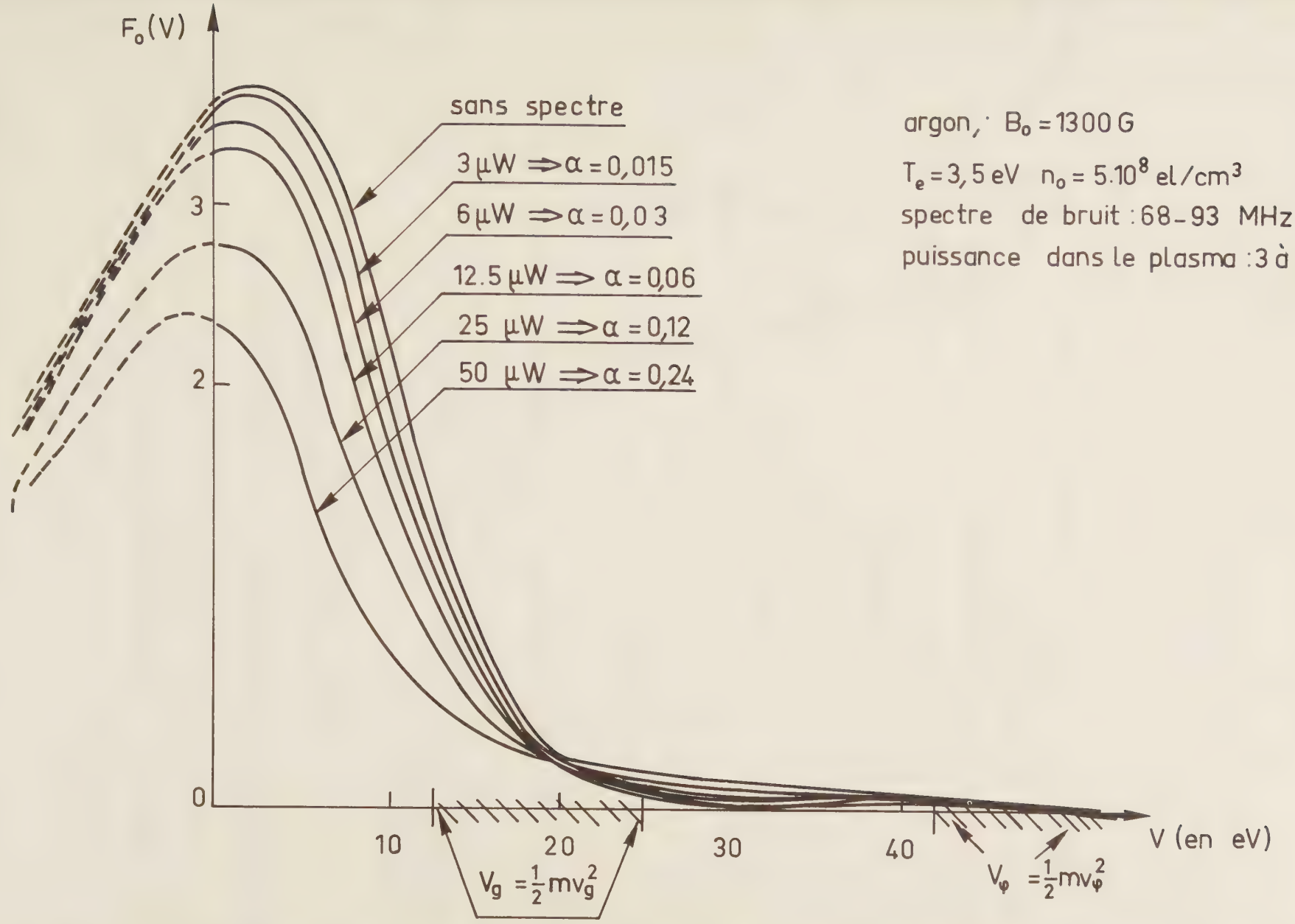
figures IX.1c et IX.1d.

IX.2 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION AVEC LA PUISSANCE A UNE DISTANCE DONNEE

La déformation de la fonction de distribution électronique pour différentes puissances du spectre est présentée sur la figure IX.2. L'origine des potentiels est déterminée à partir de la connaissance du potentiel de plasma Vp. La fonction de distribution, initialement maxwellienne, est déformée pour toutes les vitesses et on peut dire qu'elle reste quasiment maxwellienne au moins pour les puissances envisagées. Sur l'axe des x, on a représenté les domaines d'énergie correspondant aux variations de la vitesse de phase et de groupe. Une première conclusion est de noter que les domaines correspondants ne sont pas privilégiés par rapport aux autres vitesses. On observe une diminution du nombre de particules de faible vitesse et une augmentation du nombre de particules de grande vitesse, la séparation apparaissant pour une énergie correspondant à une valeur moyenne de la vitesse de groupe. Des courbes de la figure IX.2, nous pourrons déduire les valeurs des températures électroniques correspondant à chaque puissance du spectre envisagée ; nous aurons ainsi une évaluation du chauffage du plasma.

IX.3 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION AVEC LA DISTANCE POUR UNE PUISSANCE DONNEE

L'allure de la déformation de la fonction de distribution avec la distance dépend de la valeur du paramètre de turbulence α. Pour une valeur de $\alpha = 0.05$, l'évolution de la fonction



argon, $B_o = 1300$ G

$T_e = 3,5$ eV $n_o = 5.10^8$ el/cm^3

spectre de bruit : 68-93 MHz

puissance dans le plasma : 3 à 50 μW.

Fig. IX 2 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION ELECTRONIQUE POUR DIFFERENTES PUISSANCES DU SPECTRE A Z = 34 cm

de distribution est représentée sur la figure IX.3. Pour une valeur de α supérieure, $\alpha = 0.08$, les déformations avec la distance, observables sur la figure IX.4, sont plus importantes et s'étendent sur un plus grand domaine de vitesses. La fonction de distribution à grande distance perd son caractère maxwellien. Sur les deux figures, on peut tirer une conclusion pour le début du processus : la déformation n'est pas créée par l'antenne ni localisée au voisinage de l'antenne.

Quand on regarde l'évolution de la fonction de distribution avec la distance, ou avec la puissance, des figures de même allure sont obtenues. La déformation affecte l'ensemble de la fonction de distribution ; la forme maxwellienne de la fonction de distribution est le plus souvent préservée, sauf peut-être sur la figure IX.4, aux plus grandes distances ; cette déformation évolue d'ailleurs avec la distance, conformément à la théorie. Dans tous les cas où la fonction de distribution garde un caractère maxwellien, une confrontation entre les résultats théoriques et expérimentaux peut aussi être faite en comparant les résultats concernant l'évolution de la température.

IX.4 EVOLUTION DE LA TEMPERATURE

La partie maxwellienne de la fonction de distribution des électrons sert à déterminer la température électronique T_e. La maxwellienne tracée sur du papier semi-logarithmique donne une droite dont la pente est proportionnelle à $\left(\frac{kT_e}{e}\right)^{-1}$.

L'évolution de la température avec la puissance du spectre injecté est ainsi représentée sur la figure IX.5. Son évolution avec le carré de la puissance du spectre injecté est représentée

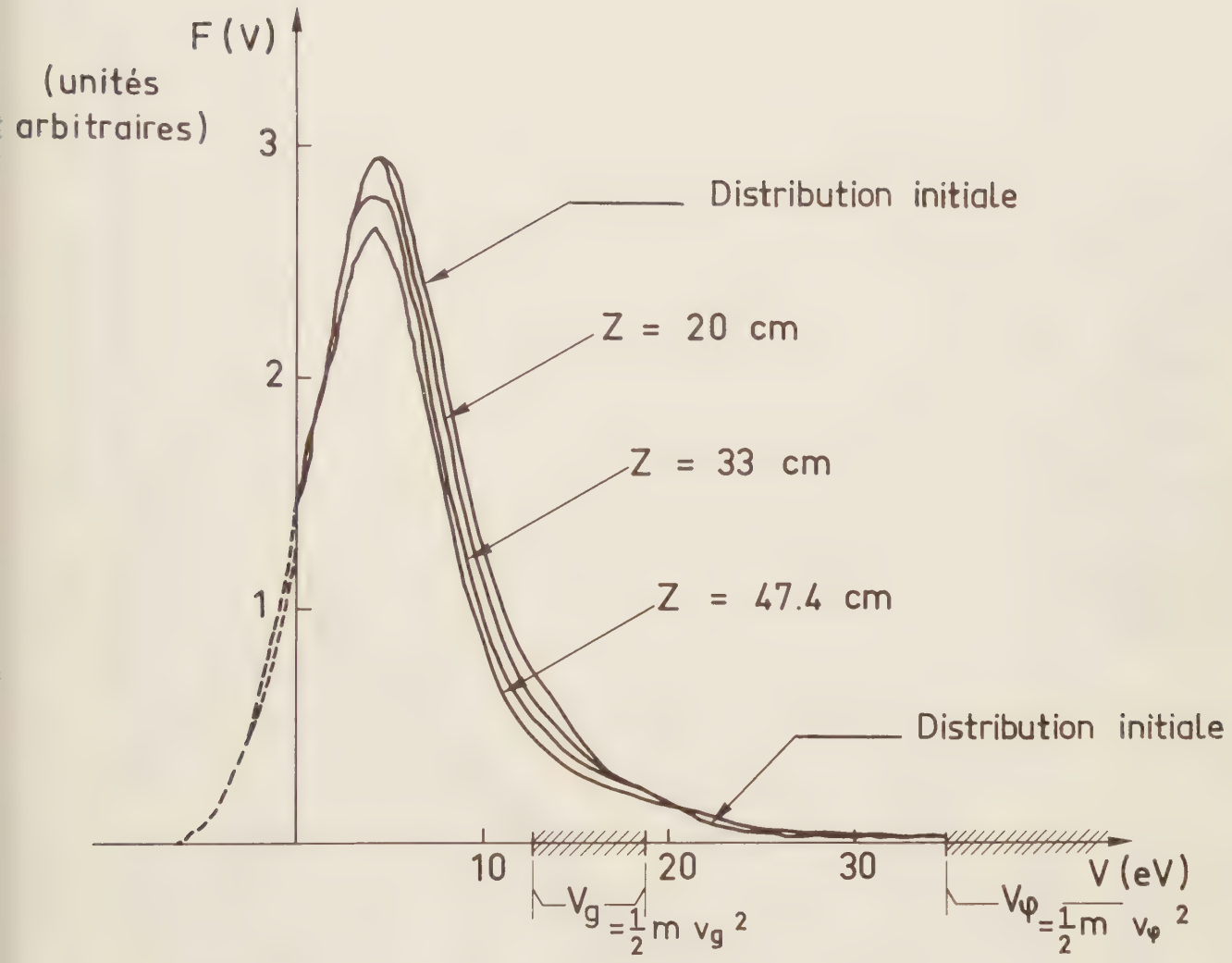


Fig. IX 3 EVOLUTION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION EN ENERGIE AVEC LA DISTANCE.

PLASMA D'ARGON $B_o = 1.3$ kG $n_o = 2.4 \times 10^8$ el/cm^3
SPECTRE D'ONDES : 68 – 93 MHz $\alpha = 0.05$

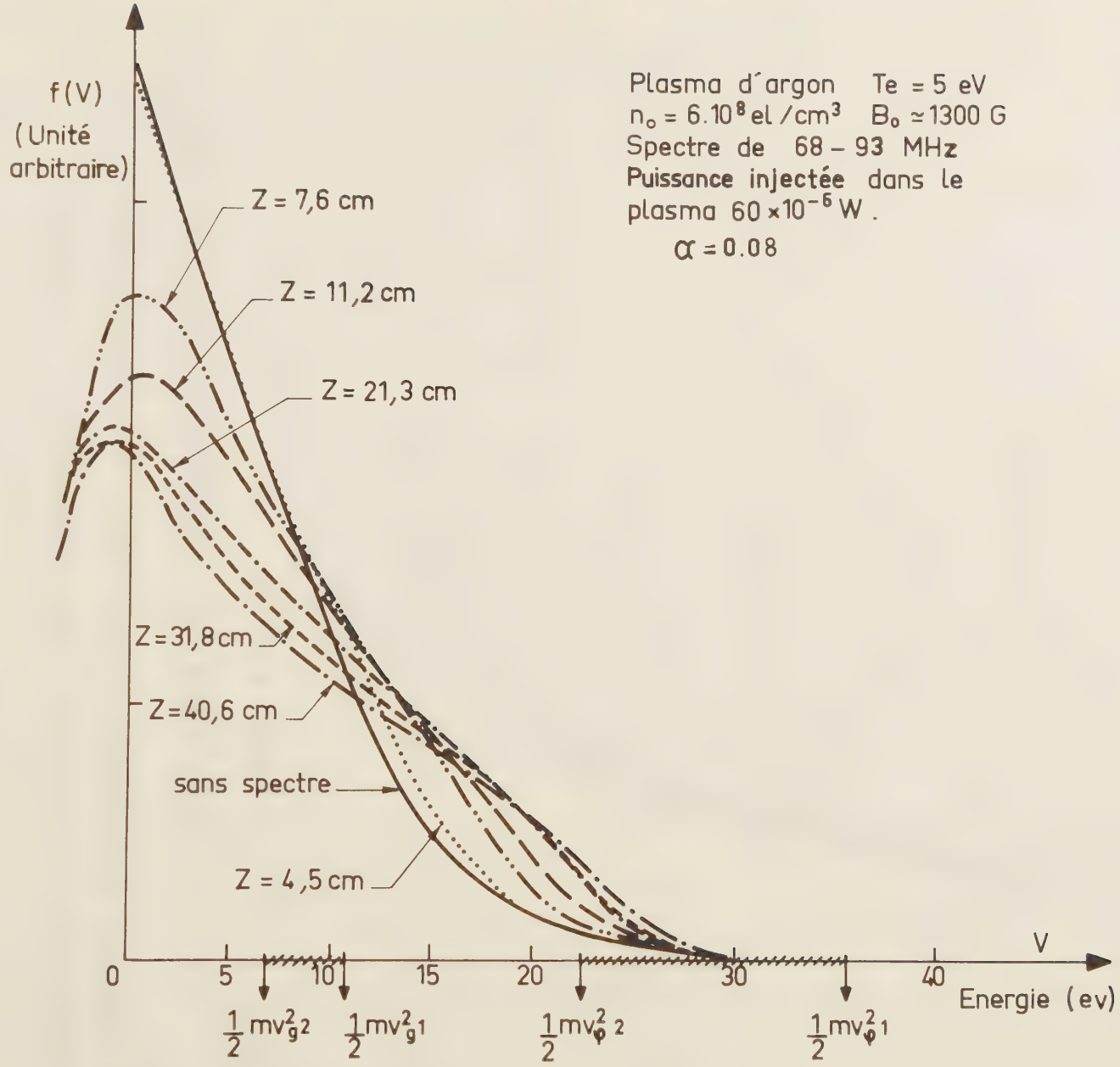


Fig. IX 4 FONCTIONS DE DISTRIBUTION DES ENERGIES ELECTRONIQUES POUR DIFFERENTES DISTANCES

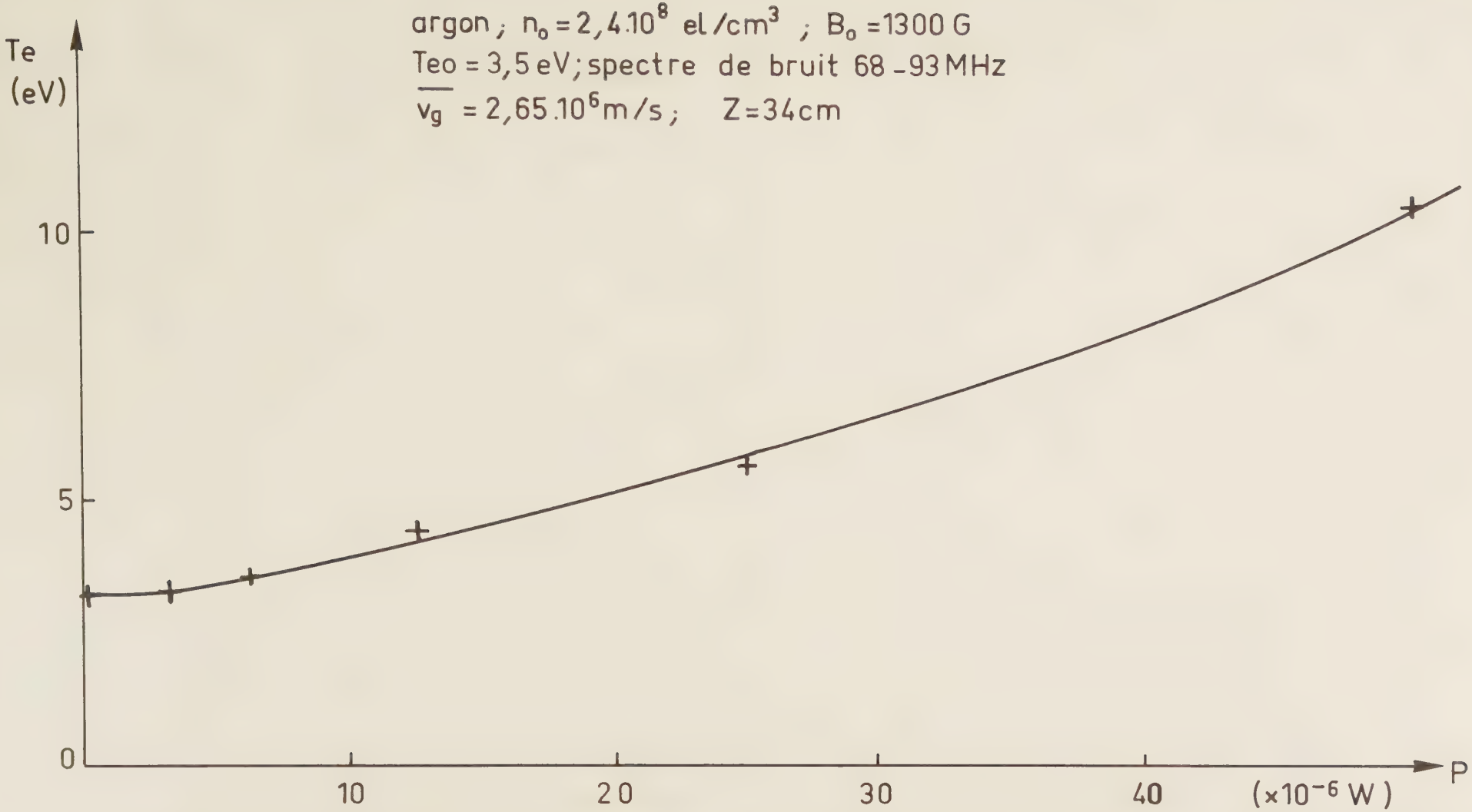


Fig. IX 5 EVOLUTION EXPERIMENTALE DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE AVEC LA PUISSANCE DU SPECTRE

sur la figure IX.6. Nous voyons clairement sur cette figure qu'il existe une dépendance linéaire de la température avec le carré de la puissance du spectre de turbulence. Sur la même figure, nous avons fait figurer la courbe théorique de variation de température avec la puissance, déduite de la formule (V.21), le facteur $\bar{a}^2$ étant proportionnel au carré de la puissance du spectre. Si nous tenons compte de tous les paramètres expérimentaux qui interviennent dans le facteur $\bar{a}^2$ et de l'incertitude sur leur mesure, nous pouvons dire qu'un assez bon accord est obtenu entre valeurs théoriques et valeurs expérimentales de la température électronique. Remarquons aussi que nous avons supposé pour calculer $\bar{a}^2$ que la puissance du spectre ne variait pas avec la distance, ce qui n'est pas vérifié expérimentalement.

Sur une même figure IX.7 sont tracées les variations théorique et expérimentale de la température électronique avec la distance, pour une puissance donnée. Les points expérimentaux ne se situant pas sur une droite, nous avons représenté par une zone hâchurée le domaine de variation de la température avec la distance. Ceci est dû à la difficulté d'estimer une température à partir des courbes donnant les fonctions de distribution, et spécialement aux faibles distances, ainsi qu'au fait que dans certains cas, le caractère maxwellien de la distribution n'existe pas sur un grand domaine de vitesses. La pente de la droite donnant la variation théorique de T_e en fonction de la distance dépend de la détermination de $\bar{a}^2$, et les incertitudes décrites plus haut subsistent. La courbe théorique et la zone hâchurée ont même allure de croissance et se recoupent dans un large domaine correspondant aux petites distances.

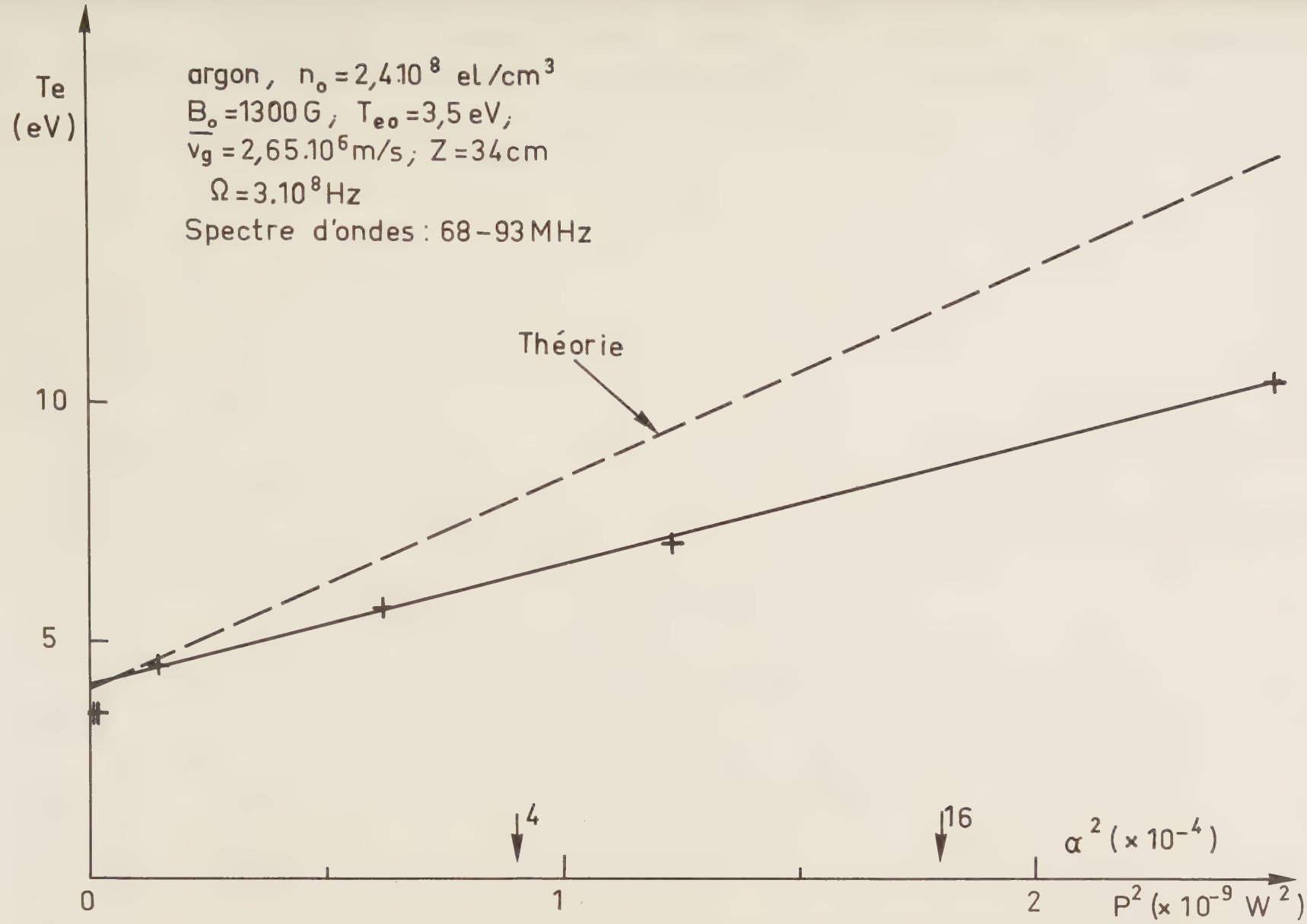


Fig. IX 6 TEMPERATURE ELECTRONIQUE EN FONCTION DU CARRE DE LA PUISSANCE DANS LE PLASMA. COMPARAISON ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE

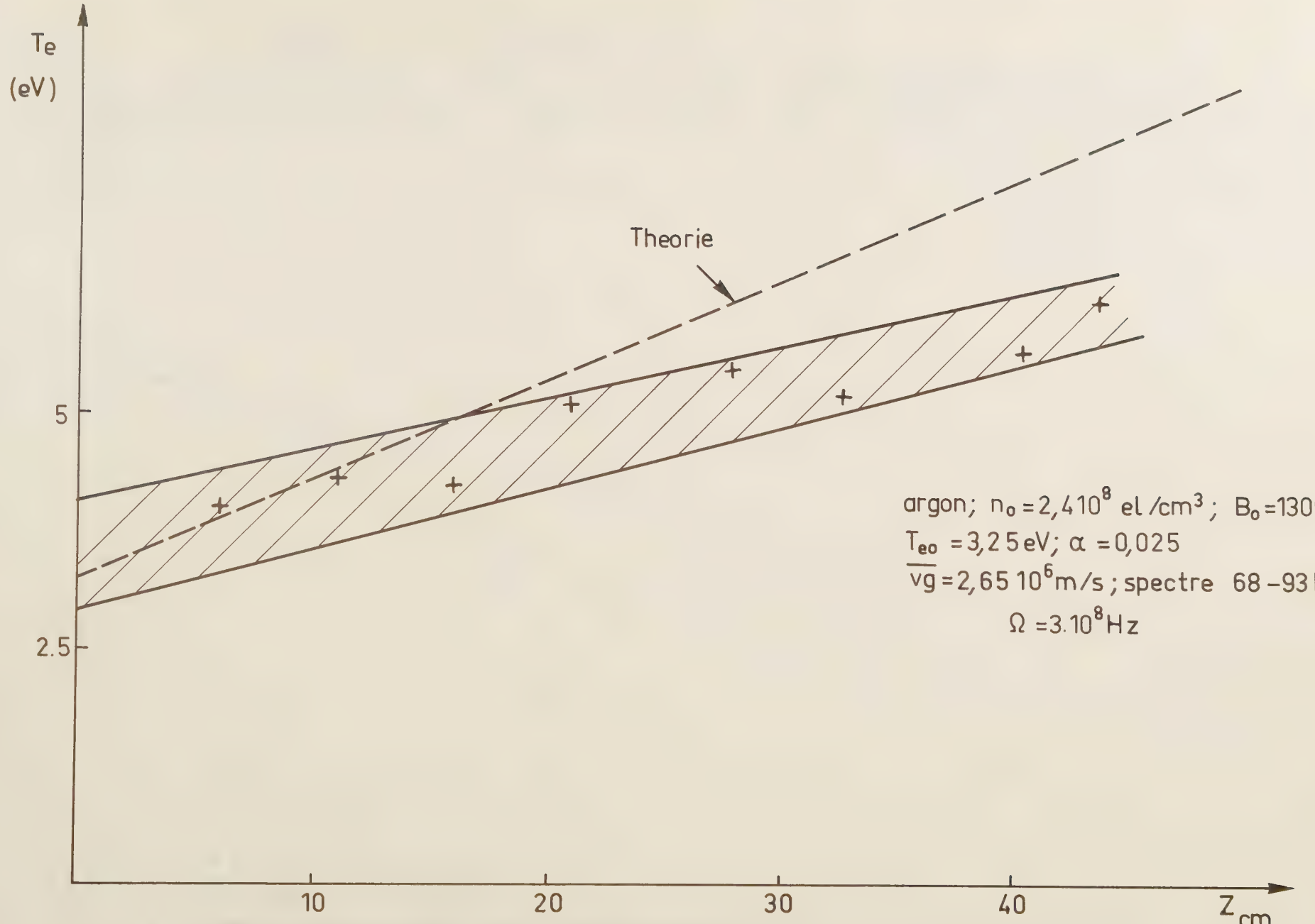


Fig. IX 7 EVOLUTION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE AVEC LA DISTANCE. COMPARAISON ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE

IX.5 CONCLUSION PARTIELLE AU VU DES FIGURES PRECEDENTES

Nous pouvons dire que compte tenu des incertitudes de mesure, un assez bon accord existe entre les résultats expérimentaux et les seuls théoriques concernant l'évolution maxwellienne de la fonction de distribution.

La déformation de la fonction de distribution moyennée sur le temps correspond toujours à un chauffage comme le prévoit l'équation V.21 ; la température électronique varie bien linéairement avec la distance et avec le carré de la puissance injectée. Le désaccord entre les résultats théoriques et expérimentaux à grande distance ou pour une grande puissance peut être expliqué par le fait que le coefficient de diffusion $\bar{a}^2$ a été pris égal à une constante. Nous allons maintenant justifier expérimentalement l'hypothèse d'une variation de la vitesse de groupe sur un large domaine, hypothèse que nous avons utilisée dans l'étude théorique. En effet, d'autres facteurs peuvent intervenir pour modifier la fonction de distribution. Nous considérerons successivement les facteurs qui peuvent modifier l'allure de la courbe de dispersion, donc modifier les vitesses de phase et de groupe du spectre de turbulence, et nous examinerons le mécanisme d'élargissement de résonance pour savoir si ces effets peuvent expliquer la déformation de l'ensemble de la fonction de distribution.

IX.6 CAUSES DE VARIATION DES VITESSES DE PHASE ET DE GROUPE

Il existe plusieurs causes de variation des paramètres dans une expérience qui font que pour une onde ou un spectre d'ondes donné, les vitesses de phase et de groupe ne sont pas constantes : en particulier, l'existence du gradient longitudinal

de densité de l'ordre de 15% sur la longueur de la colonne de plasma. Ce gradient a été négligé dans l'étude théorique, mais son influence peut se faire sentir surtout sur la fonction de distribution mais aussi sur la longueur d'onde, sur l'amplitude des ondes... ; l'existence des fluctuations temporelles de densité de l'ordre de 7 % et des fluctuations temporelles de température (quelques %) donnent une dispersion de la relation $\omega(k)$; mais aussi, la partie réelle de la relation de dispersion varie avec la puissance du spectre injecté.

Nous obtenons ainsi dans certains cas expérimentaux un domaine de variation de vg relativement large d'où une déformation sur un domaine équivalent due, au terme $F_o^{R,g}$. C'est pourquoi sur toutes les figures représentant les variations de la fonction de distribution, il faudrait tenir compte des variations de vg et v_φ.

IX.6.1 Variation de la courbe de dispersion due aux fluctuations de densité

Les fluctuations temporelles de densité sont responsables de la perte de corrélation entre les signaux A_1 et A_2 collectés par deux sondes séparées par la distance z. En supposant que la distribution de la densité autour d'une valeur constante est représentée par une loi gaussienne, il en résulte une distribution des nombres d'ondes, corrélée à la précédente par l'intermédiaire de la relation de dispersion linéaire, de type gaussien ; cette distribution peut s'écrire :

$$(IX.1) \qquad g(k_r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta k_r} \exp - \left(\frac{k_r - k_{ro}}{\Delta k_r} \right)^2$$

A la sortie du mélangeur, le signal d'intercorrélation d'une onde monochromatique faiblement amortie est de la forme :

$$(IX.2) \quad A(z) = A_1 A_2 \exp(-K_i z) \cos(K_r z)$$

Pour une distribution d'ondes, la fonction de corrélation s'écrit :

$$B(z) = A_1 A_2 \exp(-K_i z) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(K_r z)\, g(K_r)\, dK_r$$

Soit :

$$(IX.3) \quad B(z) = A_1 A_2 \exp(-K_i z) \exp\left[-\frac{(\Delta K_r)^2 z^2}{4}\right] \cos(K_r z)$$

Pour des ondes peu ou pas amorties, on vérifie expérimentalement qu'une loi en $\exp -xz^2$ peut rendre compte de la variation d'amplitude du produit d'intercorrélation.
La largeur relative $\frac{\Delta k_r}{k_r}$ déduite de ces mesures dépend des conditions expérimentales et est inférieure à 10 %.

La variation de la courbe de dispersion due aux fluctuations temporelles de densité est représentée sur la figure IX.8.
Pour ce cas particulier, on montre les variations de la vitesse de groupe et de phase dans le cas du spectre de turbulence 68-93 MHz. Ces variations sont loin d'être négligeables et il faut en tenir compte, puisqu'elles montrent que les domaines se recoupent et on peut expliquer ainsi la déformation dans son ensemble de la fonction de distribution.

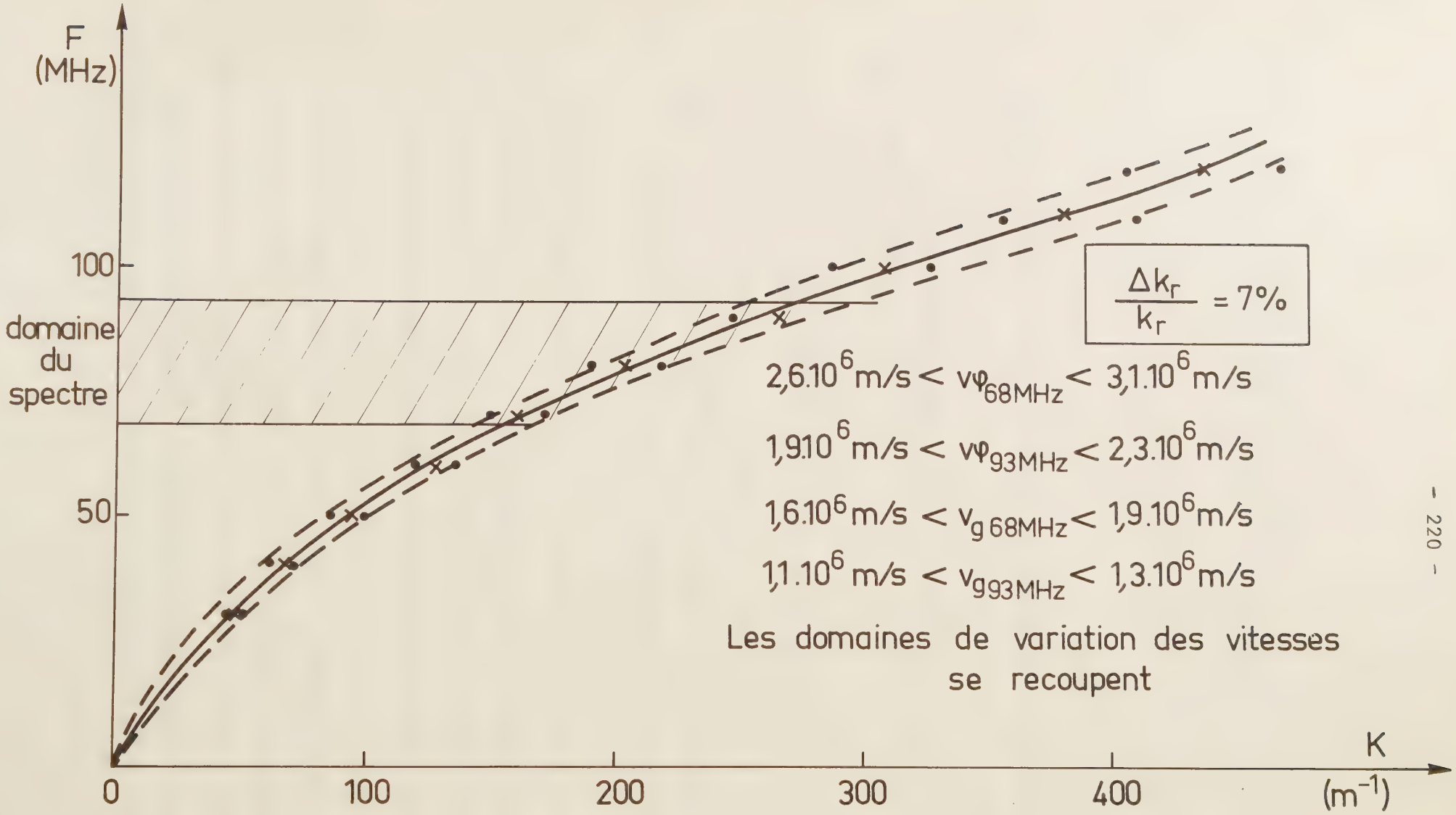


FIG IX 8 VARIATIONS DE LA COURBE DE DISPERSION AVEC LES FLUCTUATIONS DE DENSITE PAR PERTE DE CORRELATION DES SIGNAUX

B_o = 1300 GAUSS ; $n_o = 3{,}6.10^8$ el/cm^3 ; $v_{th} = 0{,}94.10^6$ m/s

IX.6.2 Variation de la courbe de dispersion avec la puissance du spectre injecté

2.a Modification théorique de la partie réelle de la relation diélectrique ε_L du fait de l'augmentation de la puissance du spectre de turbulence.

La partie réelle de la relation (II.31) s'écrit, en supprimant $\langle \varphi_\omega \varphi_\omega^* \rangle$ dans les deux membres :

$$(IX.4)\quad \mathcal{R}e\ \mathcal{E}_L = \mathcal{R}e\ \frac{q^2}{m_e^2} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\kappa'^2 (\kappa-\kappa')^6\ G}{(\kappa\omega' - \kappa'\omega)^4} \left\langle \varphi_{\omega'}\ \varphi^*_{\omega'}(z) \right\rangle \left[\mathcal{E}_\infty (\kappa-\kappa', \omega-\omega') - 1 \right]$$

L'onde forcée ($\omega-\omega'$, $k-k'$) n'étant pas résonnante, nous devons prendre pour ε_∞ ($k-k'$,$\omega-\omega'$) l'expression suivante :

$$(IX.5)\quad \mathcal{E}_\infty \left(\kappa-\kappa', \omega-\omega'\right) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2(\kappa-\kappa')^2 v_{th}^2}\ Z'\left(\frac{\omega-\omega'}{(\kappa-\kappa')\sqrt{2}\, v_{th}}\right)$$

où Z' est la dérivée de la fonction de Fried et Conte.

$\langle \varphi_{\omega'}, \varphi^*_{\omega'}, (z) \rangle$ s'exprime à partir de la relation (II .41) en fonction de la puissance P (ω',z). Nous en déduisons :

$$(IX.6)\quad \mathcal{R}e\ \mathcal{E}_L = \mathcal{R}e\ \frac{q^2}{m_e^2} \frac{\omega_{pe}^2\ G}{\varepsilon_0 v_g S\, v_{th}^2} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{(\kappa-\kappa')^4\ P(\omega', z)}{(\kappa\omega' - \kappa'\omega)^4 \frac{\partial}{\partial\omega'}\left[\omega' \mathcal{E}_{LR}(\kappa', \omega')\right]} Z'\left(\frac{\omega-\omega'}{(\kappa-\kappa')\sqrt{2}\, v_{th}}\right)$$

où ε_{LR} représente la partie réelle de ε_L.

Utilisons la relation $\varepsilon_L = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{k v_g}{\omega}$,

valable dans la partie utile du spectre, et valable donc pour les fréquences supérieures à $\frac{\Omega}{2\pi}$; dans ces conditions ε_L s'écrit :

$$(IX.7)\quad \varepsilon_L = 1 - \frac{\Omega}{\omega} - \frac{K v_g}{\omega} + \frac{q^2 G \omega_{pe}^2}{\varepsilon_0 m_e^2 S v_g \Omega^4 v_{th}^2} \int \frac{d\omega'}{2\pi} P(\omega', z) Z'\left(\frac{\omega - \omega'}{(K-K')\sqrt{2} v_{th}}\right)$$

L'utilisation de la relation de dispersion (VII.1) valable pour toute la gamme de fréquence donnerait une relation entre ε_L et $P(\omega', z)$ plus compliquée, mais de variation fonctionnelle semblable.

2.b Evaluation numérique

De l'expression (IX.7), nous pouvons déduire une variation Δk du nombre d'onde, à une fréquence donnée, en fonction de la puissance $P_T(z) = \int d\omega'\ P(\omega', z)$ dans le plasma.

Pour un cas typique d'expérience, on peut déduire une valeur de $Z' = \left(\frac{\omega - \omega'}{(k-k')\sqrt{2} v_{th}}\right)$ et donner Δk ;

$\Omega = 169\ 10^6$ Hz

$v_g = 1{,}78\ 10^6$ m/s

$v_{th} = 0{,}83\ 10^6$ m/s

$T_e = 3{,}88$ eV

$R = 10^{-2}$ m

$G = 2$

$P_T(z=0) = 5.10^{-5}$ W ; $\omega = 6{,}28\ 10^8$ Hz

$k = 300\ m^{-1}$

Pour F = 100 MHz et un coefficient de turbulence $\alpha = 0.05$, on

trouve un $\Delta k = 15 m^{-1}$, ce qui donne $\frac{\Delta k}{k} = \frac{5}{100}$. Cette valeur n'est pas suffisante pour changer la courbe de dispersion. Mais pour des valeurs de α plus grandes, la courbe de dispersion s'écarte de la relation de dispersion sans spectre de bruit. Ce résultat est mis en évidence sur la figure (IX.9) qui tient compte de résultats expérimentaux. Toutefois, les valeurs de α telles que la courbe de dispersion s'écarte de son état initial, ce qui correspond en gros à une valeur limite de $\alpha = 0.08$ déjà trouvée au chapitre VIII, dépassent le cadre de l'étude théorique et le traitement de perturbation n'est plus valable. Il est quand-même intéressant de noter que le passage du régime de turbulence faible au régime de turbulence forte se fait d'une manière continue comme nous le voyons aussi bien sur les déformations de la fonction de distribution que sur la courbe de dispersion.

En régime de turbulence forte, les vitesses de phase et de groupe du spectre varient beaucoup avec la puissance ; il n'est pas possible d'espérer une localisation de la déformation de la fonction de distribution électronique.

IX.7 EFFET D'ELARGISSEMENT DE RESONANCE

L'effet d'élargissement de résonance ("resonnance broadening" peut jouer un rôle dans la déformation de la fonction de distribution des électrons sous l'influence d'un spectre large bande d'ondes plasma électronique. Ce mécanisme s'explique de la façon suivante [3, 4, 5] : En réponse aux fluctuations de champ turbulent, les particules résonnantes sont accélérées aléatoirement, ce qui conduit à une diffusion séculaire des

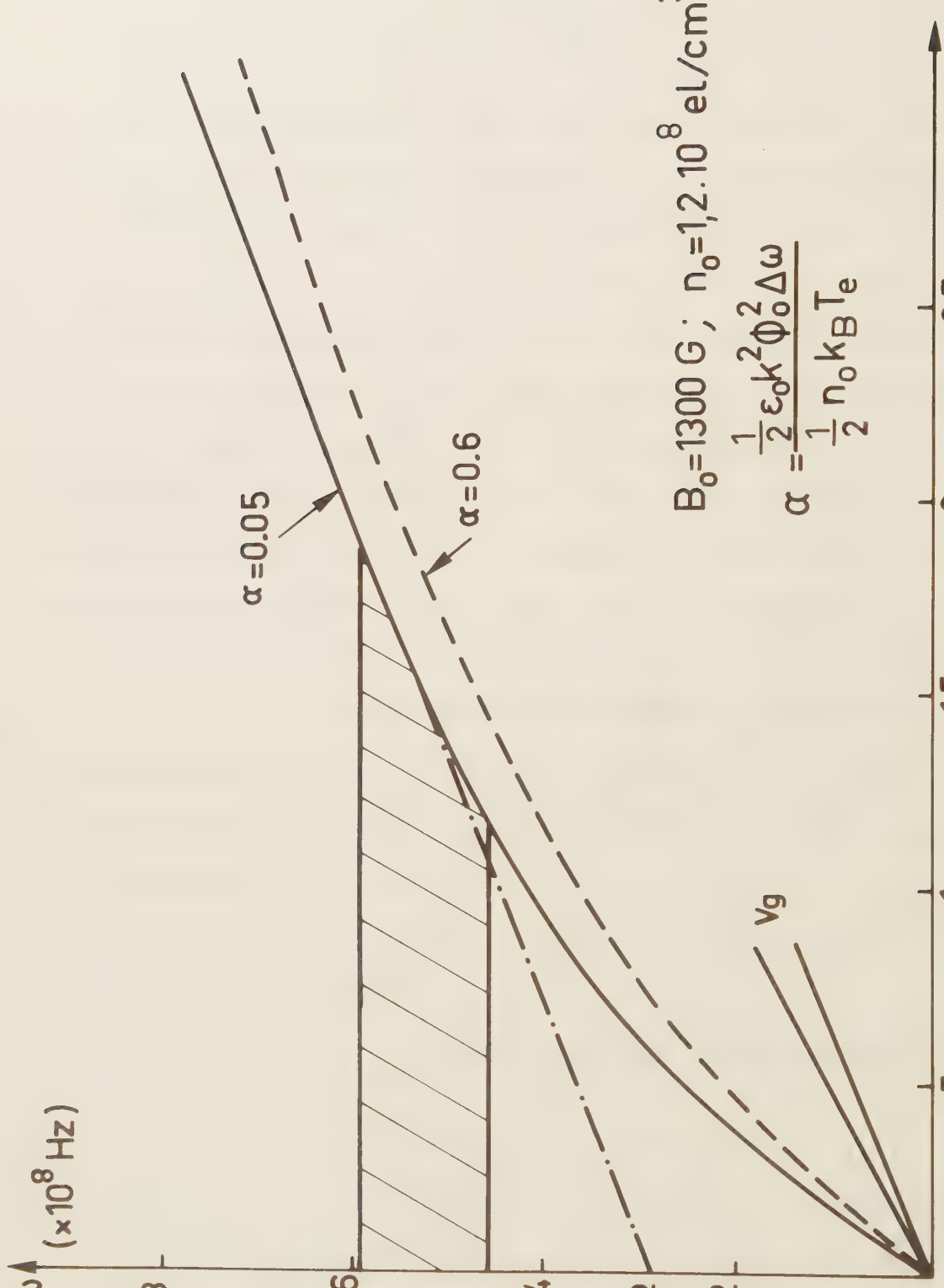


FIG.IX 9 COURBES DE DISPERSION EXPERIMENTALES POUR DEUX VALEURS DU PARAMETRE DE TURBULENCE

trajectoires de ces particules. Quand l'amplitude des fluctuations est suffisamment grande, la diffusion des trajectoires peut produire un élargissement appréciable de la résonance onde-particules. La dispersion w sur les vitesses de phase et de groupe du spectre d'onde $v_{Max} - v_{min}$ peut être évaluée à partir de l'expression :

$$\left(\frac{w}{v_{MAX} - v_{min}}\right)^3 \lesssim \frac{\pi}{3} \Delta^4$$

avec $\Delta = \frac{\tau_{ac}}{\tau_p} \ll 1$

τ_{ac} et τ_p sont respectivement les temps d'autocorrélation et de piégeage du spectre initial. Dans nos conditions expérimentales, cet effet est trop petit pour expliquer la déformation (typiquement, w est de l'ordre de quelques 10^4 m/s, négligeable devant quelques 10^6m/s, ordre de grandeur des vitesses de groupe et de phase).

IX.8 BILAN ENERGETIQUE

Pour un plasma donné, à une distance sonde émettrice-analyseur d'énergie de 50cm, nous avons calculé les valeurs de la densité, de la densité de courant, des densités d'énergie associée aux ondes et cinétique, de la température électronique, à partir de la connaissance de la fonction de distribution en énergie $F_o(V)$ correspondante.

a) la densité est donnée par la relation :

$$n_o = \int_o^\infty f(v)\, dv \qquad \text{soit :}$$

$$\boxed{n_o = \frac{e}{2m_e} \int_o^\infty \frac{1}{\sqrt{V}} f(V)\, dV}$$

b) la densité de courant qui doit être conservée :

$$J = \frac{1}{S} \int_o^R 2\pi r\, dr \int_o^\infty e\, f(v)\, v\, dv$$

soit :

$$\boxed{J = \frac{e^2}{m_e} \int_o^\infty f(V)\, dV}$$

c) la densité d'énergie cinétique

$$\mathcal{E}_c = \frac{m_e}{2} \int_o^\infty v^2 f(v)\, dv$$

$$\boxed{\mathcal{E}_c = e\sqrt{\frac{e}{2m_e}} \int_o^\infty \sqrt{V}\, f(V)\, dv = \frac{n_o K_B T_e}{2}}$$

d) la densité d'énergie associée aux fluctuations des ondes :

$$\boxed{\mathcal{E}_f = \varepsilon_o \sum_\omega |E_\omega|^2}$$

Des résultats concernant un cas expérimental particulier sont consignés dans le tableau IX.10. Ils confirment l'étude précédente.

TABLEAU IX.10

CALCUL DE CERTAINES GRANDEURS PHYSIQUES A PARTIR DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION $F_o(V)$

grandeurs physiques	plasma seul	$P_{\Delta\omega}=2\times10^{-5}$ W	$P_{\Delta\omega}=0{,}85\times10^{-4}$ W
paramètre de turbulence $\alpha = \frac{\varepsilon_o \Sigma \lvert E_\omega^2 \rvert}{\frac{1}{2} n_o k_B Te} = \frac{\xi_f}{\xi_c}$	0	2 %	7 %
densité n_o en électrons/m^3	$0{,}32 \times 10^{14}$	$0{,}32 \times 10^{14}$	$0{,}30 \times 10^{14}$
densité de courant J en A/m^2	$2{,}50 \times 10^{-8}$	$2{,}50 \times 10^{-8}$	$2{,}60 \times 10^{-8}$
densité d'énergie cinétique ξ_c en Joules/m^3	$8{,}3 \times 10^{-6}$	$8{,}8 \times 10^{-6}$	$10{,}5 \times 10^{-6}$
densité d'énergie électrique ξ_f en Joules/m^3	0	$0{,}18 \times 10^{-6}$	$0{,}75 \times 10^{-6}$
Température électronique T_e (eV)	3,05	3,10	3,30

conditions expérimentales B_o = 1300 G spectre de bruit 68 MHz $< F_{\Delta\omega} <$ 93 MHz

z = 0,5m R = $1{,}42 \times 10^{-2}$ m

IX.9 CONCLUSION

Les résultats expérimentaux concernant la déformation de la fonction de distribution électronique moyennée sur le temps et l'évolution de la température électronique confirment quantitativement l'étude théorique de l'influence du spectre de turbulence sur la distribution énergétique des électrons. La perturbation, qui serait initialement localisée au voisinage de la vitesse de groupe en l'absence de tout autre mécanisme de variation des vitesses de phase et de groupe, se déplace avec ces variations ; la distribution conserve un caractère maxwellien avec une augmentation de la température électronique proportionnelle à la longueur d'observation et au carré de la puissance injectée.

A forte puissance, car le traitement de perturbation n'est plus valable, et à grande distance où d'autres phénomènes interviennent pour modifier la fonction de distribution (en particulier le gradient de densité longitudinal) les résultats expérimentaux s'écartent un peu des prévisions théoriques.

CHAPITRE IX

BIBLIOGRAPHIE

/1/ F. GERVAIS, G. MATTHIEUSSENT, J. OLIVAIN and A. QUEMENEUR, Conference on physics of ionized gases Septembre 1976, DUBROVNIK, proceedings p. 455

/2/ F. GERVAIS, G. MATTHIEUSSENT, J. OLIVAIN et A. QUEMENEUR, Rapport EUR-CEA F-C. 841 (1976), accepté pour publication dans Physics of Fluide.

/3/ T.H. DUPREE, Phys. of Fluids, Vol. 9, p. 1773 (1966)

/4/ J. WEINSTOCK, Phys. of Fluids, Vol. 15, p. 454 (1972)

/5/ J.H. MISGUICH, R. BALESCU, EUR-CEA F.C. 749 (1974)

CHAPITRE X

CONCLUSION : REFLEXIONS SUR LE DOMAINE DE FORTE TURBULENCE

Nous avons vu dans les chapitres précédents que dans le domaine de validité de l'approximation de faible turbulence, les résultats théoriques et expérimentaux concernant l'évolution spatiale du spectre et la déformation de la fonction de distribution sont en bon accord. Bien qu'il n'existe pas de théorie en régime de turbulence forte, intéressons-nous à ce qui se passe pour $\alpha > 0,08$, aussi bien en ce qui concerne l'évolution du spectre qu'en ce qui concerne la déformation de la fonction de distribution.

X.1 EVOLUTION SPATIALE DU SPECTRE

Dans les conditions où α devient supérieur à 0,08, on peut montrer expérimentalement que la forme du spectre d'onde atteint un état quai-asymptotique pour les plus grandes distances d'observation. Pour une grande puissance injectée (440 mW - 4db), correspondant dans ce cas à un coefficient $\alpha = 0,5$, l'état d'équilibre est atteint au bout d'une distance de 39cm, le spectre n'évoluant pratiquement plus jusqu'à la dernière distance d'observation, soit 50cm (Fig X.1). Cet état quasi-asymptotique correspond à

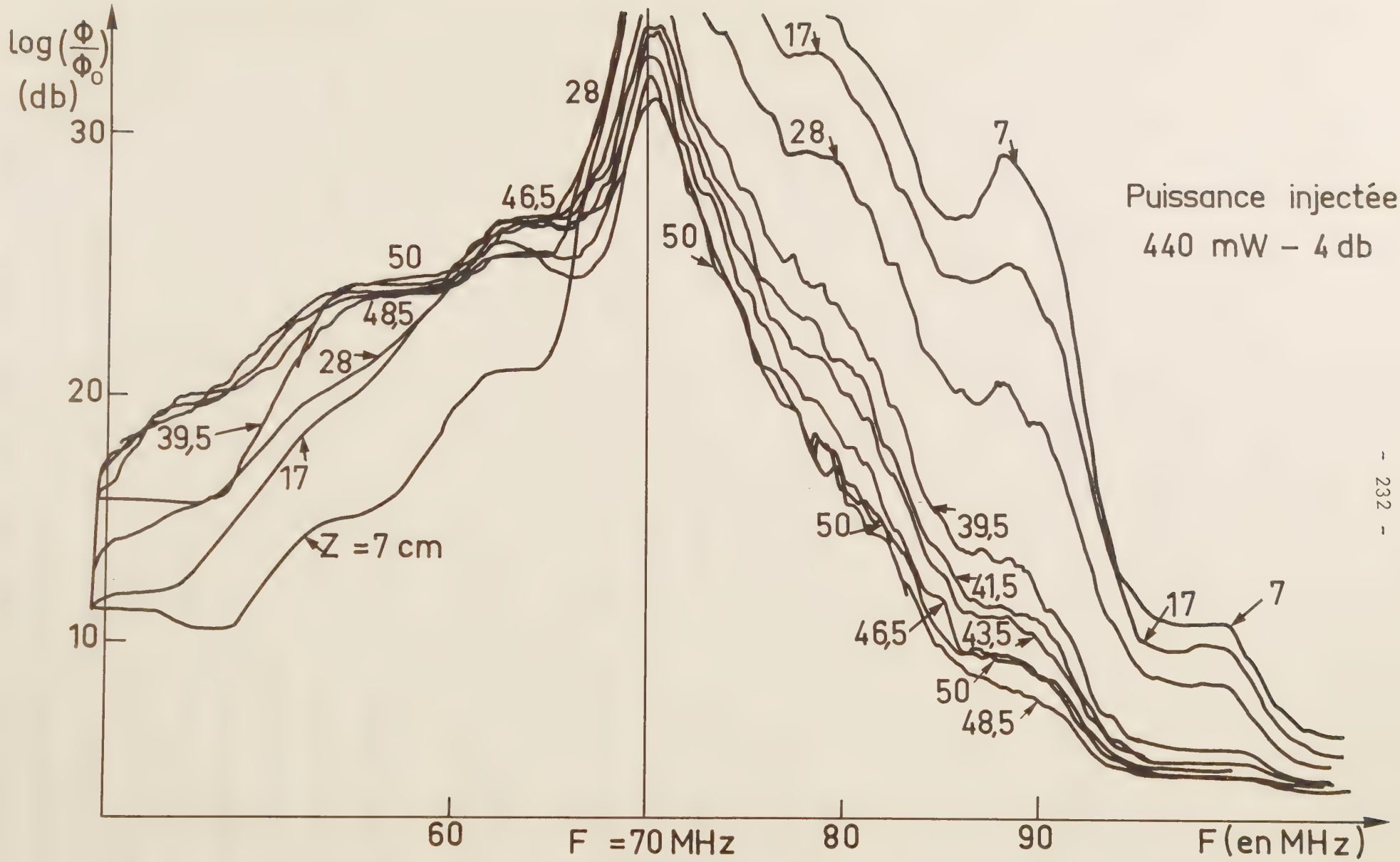


FIG. X-1 EVOLUTION D'UN SPECTRE DE FORTE PUISSANCE POUR DIFFERENTES DISTANCES EMETTEUR – RECEPTEUR

$B_o = 1300\,G$; $n_o = 3{,}3 \cdot 10^8\ el/cm^3$; $T_{eo} = 3\,eV$; $\alpha = 0{,}5$

un fort transfert d'énergie vers les basses fréquences du spectre, de part et d'autre d'une région $F=F_o$, c'est-à-dire autour d'une composante de nombre d'onde k_o (Fig. X.2). Dans la région de décroissance du spectre, l'énergie associée W_a est proportionnelle à $\frac{1}{k^\nu}$, ν étant un coefficient variant entre 2,84 et plus [1, 2, 3] selon la puissance injectée dans le spectre, et pour une fréquence correspond à 2 ou $3k_o$ au moins.

Dans notre expérience, k est relié à la fréquence F par la relation :

$$k = \frac{2\pi F - \Omega}{v_g}$$

Soit :

$$W_a = \frac{\text{cste}\ v_g^{\nu}}{\omega^{\nu}}\left[1 + \nu\frac{\Omega}{\omega} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + \cdots\right]$$

En première approximation, nous pouvons écrire :

(X.1) $$\boxed{W_a = \frac{\text{cste}}{F^{\nu}}}$$

L'énergie $W_a = \varepsilon_o E^2$ étant proportionnelle à $k^2\phi^2$,

(X.2) $$\frac{(k_2\,\phi_2)^2}{(k_1\,\phi_1)^2} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{\nu}$$

Les courbes expérimentales donnant le logarithme de l'amplitude du potentiel en fonction de la fréquence sont telles que :

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{\nu}$$

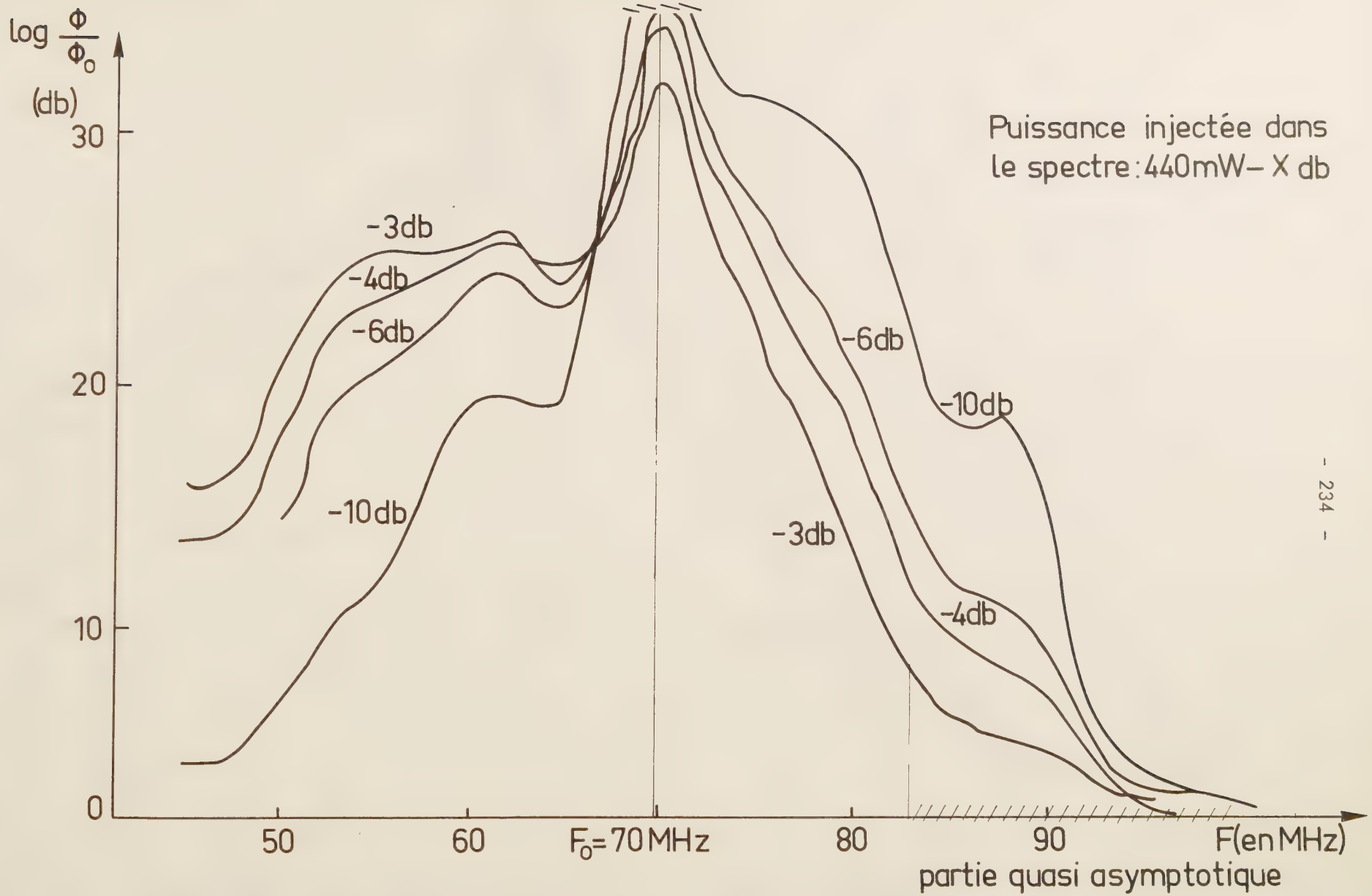


Fig X-2 EVOLUTION DU SPECTRE A Z = 44 cm POUR DIFFERENTES PUISSANCES INJECTEES

$B_o = 1300$ G ; $n_o = 3{,}3.10^8$ el/cm^3 ; $T_{eo} = 3$ eV

Si $\frac{K_1}{K_2} \simeq \frac{F_1}{F_2}\left[1 - \frac{\Omega(F_2 - F_1)}{2\pi F_2 F_1}\right]$ est pris égal à $\frac{F_1}{F_2}$
l'expression (X.2) s'écrit :

(X.3) $$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{\frac{\nu}{2}+1}$$

Dans la partie quasi-asymptotique du spectre, définie sur la courbe 440mW - 3db de la figure X.2, on trouve :

$$\nu' = \frac{\frac{5 \text{ décibels}}{20}}{\log_{10} 80 - \log_{10} 62,5}$$

$\nu' = 2,5$

Soit $\nu = 3$.

Cette valeur peut coïncider avec une valeur théorique, surtout si l'on considère toutes les approximations utilisées.

X.2 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION EN REGIME DE TURBULENCE FORTE

Bien que les calculs théoriques du chapitre V cessent d'être valables, on peut admettre qu'un terme analogue au second terme résonnant $F_0^{R,vg}$ existe et qu'il croît de la même façon comme le carré de la puissance du spectre d'ondes. Ce terme devient le terme dominant et il correspond à un fort chauffage du plasma. La déformation s'étend bien au-delà du domaine résonnant. A une distance donnée z = 48cm, les variations de la fonction de distribution en fonction de la puissance dans le spectre sont représentées sur la

figure X.3. Un chauffage du plasma est très clairement observé sur les courbes qui restent quasiment maxwelliennes (excepté pour $\alpha = 0.36$).

Les variations de la fonction de distribution électronique pour une grande puissance: $\alpha = 0.3$, avec la distance sont observées sur la figure X.4.

Une déformation de l'ensemble de la fonction de distribution est observée comme sur la figure X.3.

On peut rassembler les résultats concernant le chauffage des particules dans le tableau ci-dessous (X.5)

Tableau X.5

plasma d'argon ; $B_0 = 1300G$; $n_0 = 2,3\ 10^8$ el/cm^3 ; $T_{eo} = 1,44$ eV

P_{watt}	0	$2,6\ 10^{-5}$	$3,1\ 10^{-5}$	$6,2\ 10^{-5}$	$24,5\ 10^{-5}$
α	0	0,05	0,11	0,20	0,66
T_e en eV	1,44	1,55	2,4	5,2	queue de très haute température

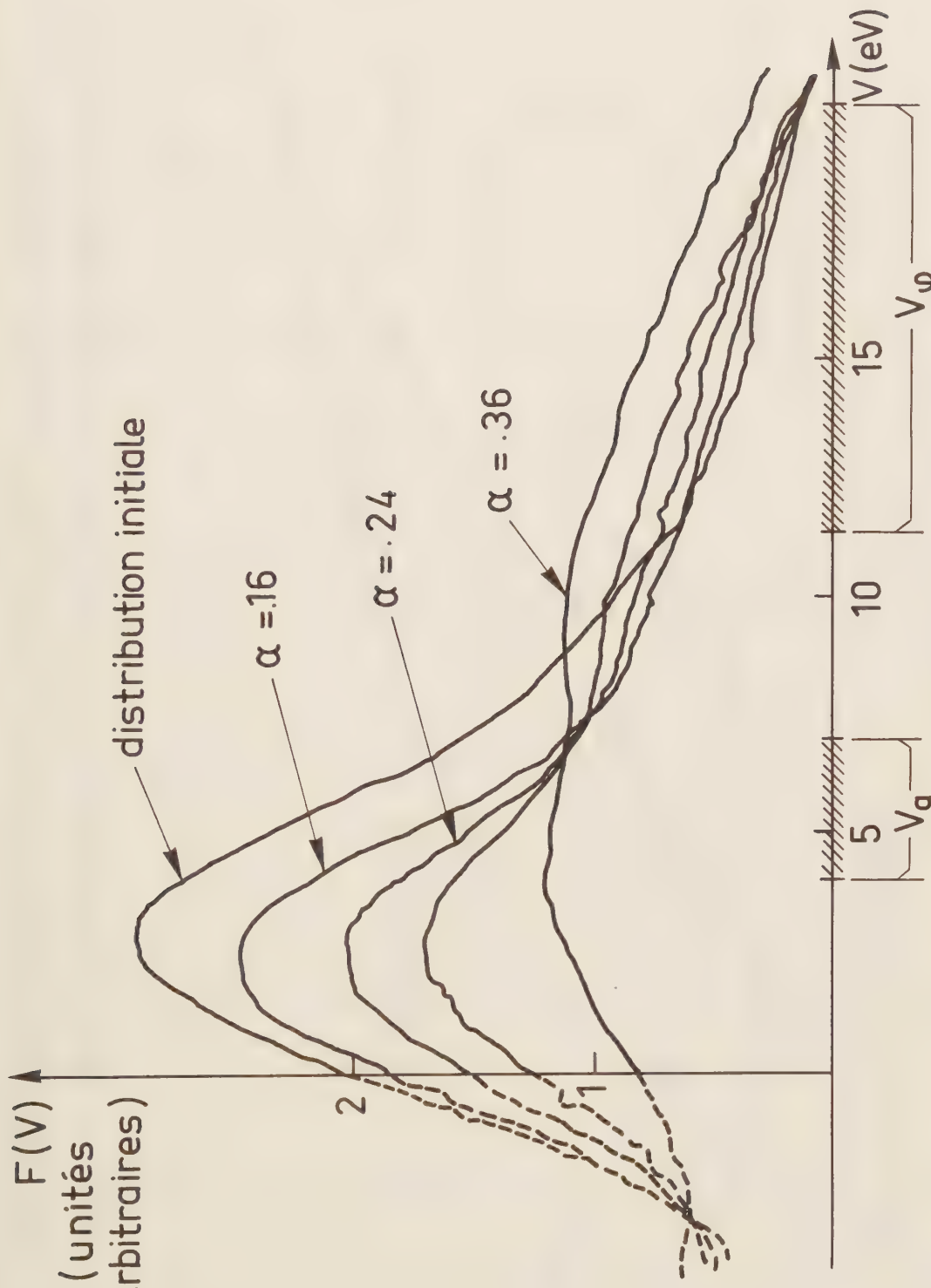


FIG.X 3 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION POUR DE GRANDES PUISSANCES DANS LE SPECTRE

Plasma d'argon . B_o=1300 Gauss

Z = 48 cm $n_o = 3.4 \times 10^8$ el/cm^3

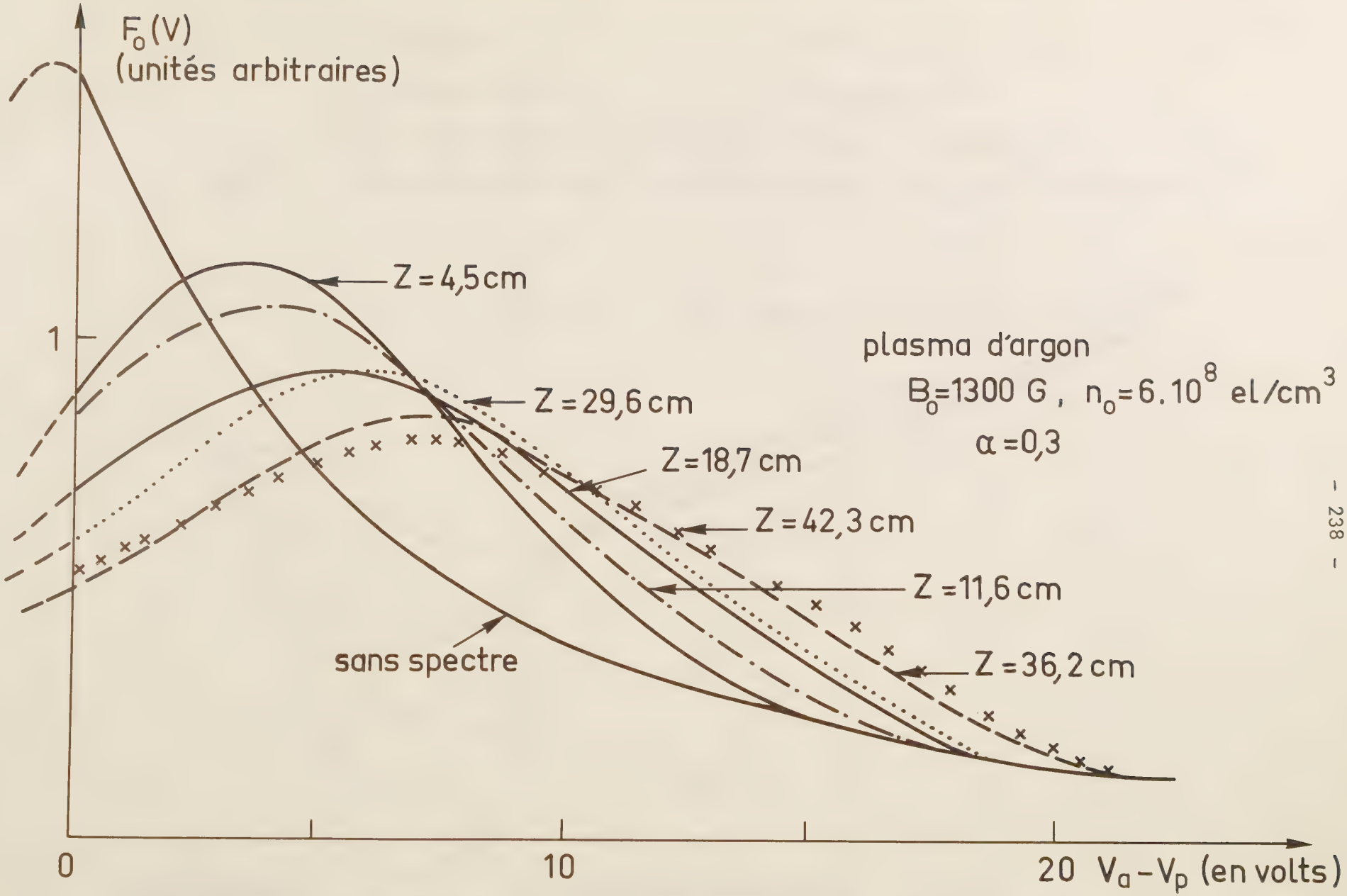


FIG. X 4 DEFORMATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION $F_o(V)$ A DIFFERENTES DISTANCES ET POUR UNE FORTE PUISSANCE.

X.3 CONCLUSION

L'interaction d'un spectre d'ondes avec un plasma peut être analysée en trois régimes successifs qui dépendent de la puissance du spectre injecté.

X.3.1 Un régime linéaire $\alpha \leq 0,01$

Dans ce régime très bien connu, les particules résonnantes à la vitesse de phase participent seules à l'intéraction. Le spectre n'est pratiquement pas déformé le long de la colonne, chaque composante étant amortie par effet Landau. La déformation de la fonction de distribution est très faible.

X.3.2 Un régime de turbulence faible $\alpha \leq 0,08$

L'évolution du spectre est étudiée par mécanisme d'effet Landau non linéaire. Un transfert du spectre vers les basses fréquences est observé. Une relaxation quasi-linéaire de la fonction de distribution est attendue, conduisant à un faible chauffage du plasma.

X.3.3 Un régime de turbulence forte $\alpha > 0,08$

Le spectre atteint un état de quasi-équilibre avec un grand transfert d'énergie vers les basses fréquences du spectre. Une déformation de l'ensemble de la fonction de distribution est observée et elle correspond à un fort chauffage du plasma. Le tableau (X.6) qui reprend les résultats du tableau IX.11 en y associant les valeurs

de la densité, des densités de courant, d'énergie cinétique et électrique pour une valeur du paramètre $\alpha = 0,7$, confirme ces résultats. Nous constatons que la densité n_o, calculée à partir d'une courbe expérimentale de fonction de distribution correspondant à cette forte puissance, a beaucoup décru. Par contre, la température électronique a cru et le produit $n_o\sqrt{T_e}$ d'abord constant comme prévu, varie légèrement en régime de forte turbulence. La densité de courant est constante à 12 % près en régime de turbulence forte.

Tableau X.6 Bilan énergétique en régime de forte turbulence (spectre 68-93MHz)

		effet Landau non linéaire		turbulence forte	
Grandeurs	plasma seul	$P=2.10^{-5}W$ $\alpha= 0,02$	$P=0,85.10^{-4}W$ $\alpha= 0,07$	$P=1,05.10^{-3}W$ $\alpha= 0,68$	Commentaires
densité n_o en el/cm^3	$0,32.10^{8}$	$0,32.10^{8}$	$0,32.10^{8}$	$0,12.10^{8}$	diminution de 270%
densité de courant en A/m^2	$2,50.10^{-8}$	$2,5.10^{-8}$	$2,6.10^{-8}$	$2,2.10^{-8}$	constant à 12 % près
densité d'énergie cinétique en J/m3	$8,3.10^{-6}$	$8,8.10^{-6}$	$10,5.10^{-6}$	13.10^{-6}	
densité d'énergie électrique enJ/m^3	0	$0,18.10^{-6}$	$0,75.10^{-6}$	$8,8.10^{-6}$	
Température électronique en eV	3,05	3,10	3,30	10	augmentation de 330 %

$B_o = 1300$ G ; Z = 50cm ; R = $1,42\ 10^{-2}$ m

CHAPITRE X

BIBLIOGRAPHIE

/1/ S.B. PIKEL'NER and V.N. TSYTOVICH
Soviet Physics JETP Vol. 28, n° 3, page 507 (1969)

/2/ V.A. LIPEROVSKII and V.N. TSYTOVICH
Soviet Physics J.E.T.P. Vol. 30, n° 4, p. 682 (1970)

/3/ V.G. MAKHANKOV, E.P. ZHIDKOV, V.N. TSYTOVICH
and CHE ZE HEN
Plasma Physics, Vol. 12, p. 191 (1970)